

## **Valor em Risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica**

**Fernando Caio Galdi\***

*Universidade de São Paulo*

**Leonel Molero Pereira\*\***

*Universidade de São Paulo*

**RESUMO:** Este artigo explora três modelos utilizados para a estimativa da volatilidade: suavização exponencial – EWMA, volatilidade condicional – GARCH e volatilidade estocástica – VE. A volatilidade estimada por estes modelos pode ser utilizada em uma métrica de risco de mercado denominada Valor em Risco – VaR. A medida do VaR depende da volatilidade, do horizonte de tempo e do intervalo de confiança para os retornos contínuos em análise. Para a avaliação empírica destes modelos utilizamos uma amostra com preços de ações preferenciais da Petrobras para a especificação do GARCH e do modelo de VE. Adicionalmente realizamos testes para se verificar o ajustamento dos modelos à amostra selecionada. Nesse sentido utilizamos o teste de violação dos limites para um VaR de um dia, com intuito de comparar a eficiência dos modelos GARCH, VE e EWMA (sugerido pelo Riskmetrics). Pelos resultados verifica-se que o VaR calculado pelo EWMA sofreu um menor número de violações do que o calculado pelo GARCH e pela VE para uma janela de 1500 observações. Assim, o modelo sugerido pelo Riskmetrics (1999), utilizando a volatilidade calculada através da suavização exponencial, além de ser favorecido pela simplicidade em sua implementação, não forneceu resultados inferiores no teste de violação, comparado a modelos mais sofisticados como o de VE e o GARCH.

**Palavras Chave:** VaR, Volatilidade Estocástica, GARCH, EWMA

---

*Recebido em 15/12/2006; revisado em 03/01/2007; aceito em 05/02/2007.*

**Correspondência com autor:**

\* E-mail: [fecaio@uol.com.br](mailto:fecaio@uol.com.br)

\*\* E-mail: [leonel@usp.br](mailto:leonel@usp.br)

**Nota do Editor:** Este artigo foi aceito por *Alexsandro Broedel Lopes*.

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos de volatilidade têm como principal objetivo prover uma métrica que pode ser utilizada na gestão de riscos financeiros, auxílio na seleção de carteiras de ativos e na formação de preços de derivativos.

Os modelos de valor em risco – VaR, utilizados na gestão de risco de instituições financeiras, como medida de risco perda financeira para um determinado intervalo de confiança e horizonte de tempo, precisam de uma estimativa de volatilidade para a sua elaboração. Os modelos de previsão de volatilidade, como o GARCH e volatilidade estocástica são propostos como alternativa para essa estimativa.

Nesse sentido o presente artigo sugere a utilização dos modelos auto-regressivos de heteroscedasticidade condicional e de volatilidade estocástica para a previsão da volatilidade utilizada nas medidas de VaR.

Neste trabalho os modelos são especificados e seus parâmetros estimados utilizando uma longa amostra de retornos contínuos de ações preferenciais de Petrobras. Adicionalmente, realiza uma comparação, através de um teste de violação dos limites de VaR dos modelos obtidos pelo GARCH, pelo modelo de volatilidade estocástica (MVE) e pelo modelo sugerido pelo Riskmetrics (1999) para os retornos marcados a mercado da carteira de ações da Petrobras.

O artigo é organizado em oito seções distintas mais anexos onde a segunda seção apresenta a medida do VaR e a adequação dos modelos de volatilidade a essa medida. A terceira seção introduz os principais conceitos do modelo GARCH. A seção quatro faz uma breve apresentação dos modelos de volatilidade estocástica. Na seção cinco e seis são apresentados os dados utilizados e os modelos de volatilidade são especificados. A sétima seção detalha a realização de um *Backtesting* para comparar a eficiência dos modelos de previsão de volatilidade utilizados no VaR. A oitava seção apresenta as considerações finais. Os anexos apresentam resultados mais detalhados da estimação de cada modelo.

## 2. VALOR EM RISCO DE MERCADO (VaR) PARA UMA CARTEIRA

O valor em risco (VaR) tem como finalidade a mensuração de riscos de mercado em termos de volatilidade dos preços dos ativos. O VaR, como definido por Jorion (2001, p.19), sintetiza a maior (ou pior) perda esperada de uma carteira, dentro de determinados períodos de tempo e intervalo de confiança.

Formalmente, define-se o VaR para uma posição comprada em um ativo S em um horizonte de tempo  $j$ , com probabilidade  $p$ , sendo  $0 < p < 1$ :

$$p = P(\Delta P_j \leq VaR) = F_j(VaR) \quad (2.1)$$

onde  $\Delta P_j$  representa o ganho ou a perda da posição  $P$ , dada por  $\Delta P_j = P_{t+j} - P_t$ ;  $F_j(.)$  é a função de distribuição acumulada (f.d.a) da variável aleatória  $\Delta P_j$ .

O VaR é dado em unidades monetárias e representa o  $p$ -quantil da distribuição  $F_j(.)$ . Segundo Moretin (2004, p.179) estima-se este quantil a partir da distribuição empírica dos retornos. O VaR calculado em (2.1) tem valor negativo, pois quem tem uma posição comprada sofre perda se  $\Delta P_j < 0$ . A quantia em unidades monetárias no cálculo do VaR é obtida multiplicando o valor da posição financeira pelo VaR do retorno.

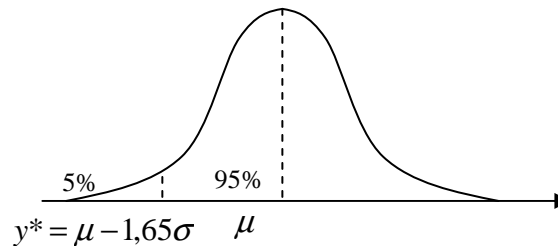
O VaR pode ser simplificado, se for possível supor distribuição normal dos retornos contínuos ( $y_t$ ), ou log-retornos, dos ativos que compõem a carteira. Partindo-se das estimativas dos parâmetros da distribuição, como o desvio-padrão dos retornos, pode-se determinar a perda esperada carteira da seguinte maneira:

$$p = \int_{-\infty}^{y^*} f(y) dy, f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^*-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

sendo  $y^*$  o valor de retorno crítico para o cálculo do VaR para o horizonte de tempo  $j$ .

A seguinte figura ilustra o cálculo do VaR de 5% para uma distribuição de retornos supostamente normal, com média de retornos  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ :

**Figura 1: VaR com distribuição normal**



Fonte: elaboração própria

Dessa forma é possível calcular o VaR a partir da função densidade de probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão. Entretanto, deve-se tomar o cuidado de converter o log-retorno do VaR em uma variação percentual discreta  $i$ , da seguinte maneira:

$$i = e^{y^*} - 1 \quad (2.3)$$

O VaR absoluto sugerido pelo RiskMetrics, em Longestaey e More (1995), parte da premissa que a distribuição condicional dos retornos é normal e possui média zero e variância  $\sigma_{t+1}^2$ , sendo  $y_{t+j} | I_t \sim N(0, (j-t)\sigma_{t+1}^2)$ , sendo  $\sigma_{t+j}^2 = (j-t)\sigma_{t+1}^2$ .

Para o cálculo do VaR é necessária uma estimativa da volatilidade dos log-retornos do ativo para o horizonte de análise. Neste estudo são avaliadas três abordagens distintas de estimativa de volatilidade para o cálculo do VaR. A primeira abordagem, que tem como base o modelo proposto pelo Riskmetrics, método mais difundido entre os usuários de VaR, utiliza suavização exponencial com fator de decaimento  $\lambda$  de 0,94 e pressupõe a distribuição normal dos retornos. Esta abordagem pode ser considerado um caso particular do modelo GARCH (auto-regressivo de heteroscedasticidade condicional generalizada), e de acordo com Jorion (2001, p. 175) é representada pela seguinte equação:

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1-\lambda)y_{t-1}^2 \quad (2.4)$$

O segundo método analisado utiliza o conceito de volatilidade condicional modelada através de uma combinação de ARMA mais GARCH gaussiano, e o terceiro, realiza a previsão da volatilidade através do modelo de volatilidade estocástica.

Berkowitz e O'Brien (2002) avaliaram os modelos de VaR de uma amostra de 6 diferentes bancos utilizando séries históricas. Compararam os modelos utilizados pelos bancos com o VaR calculado a partir de um modelo ARMA(1,1) mais GARCH(1,1) assumindo distribuição normal. Verificaram através de *backtest* que o VaR dos bancos, apesar de ser mais conservador, não acompanhava a volatilidade do  $P\&L^1$  das carteiras e foi superado pelo GARCH em termos de violação dos limites do VaR. Jorion (2001, p. 170) afirma que os modelos de cálculo de VaR que utilizam GARCH são mais precisos, principalmente nos casos onde há agrupamentos de volatilidade.

<sup>1</sup> *P&L*: Profit and Loss, significa apuração de resultados de uma carteira.

Neste estudo é utilizado o modelo de volatilidade condicional na forma reduzida para o cálculo do VaR, como foi realizado no trabalho de pesquisa de Berkowitz e O'Brien (2002), originalmente proposto por Zangari (1997). O modelo utilizado será composto por um componente autorregressivo dos retornos, representado por um modelo AR(1)<sup>2</sup>:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Combinado com um modelo de volatilidade condicional GARCH(1,1)

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (2.6)$$

Para o cálculo do VaR com o modelo de volatilidade condicionada AR(1) mais GARCH(1,1), utiliza-se a média e variância condicionais um passo a frente estimadas através do modelo:

$$y_{t+1} | I_t \sim N(\hat{y}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1)) \quad (2.7)$$

Nesse contexto supondo um VaR de 5% de um dia, ( com  $p = 5\%$ , e  $z = 1,65$ ), ele deve ser calculado da seguinte forma:

$$VaR_{5\%} = \hat{y}_t(1) - 1,65 \hat{\sigma}_t^2(1) \quad (2.8)$$

Nas seguintes seções são descritos os modelos utilizados para prever a volatilidade utilizada no cálculo do VaR.

### 3. MODELO GARCH

Engle (1982) mostra que é possível modelar simultaneamente a média e a variância de uma série. Para isso lança mão do conceito de variância condicional, que pode ser modelada como um termo autorregressivo:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + v_t \quad (3.1)$$

onde  $\hat{\varepsilon}_t$  é o resíduo estimado do modelo  $y_t = a_0 + \Phi y_{t-1} + \varepsilon_t$  e  $v_t$  é um ruído branco.

A representação da equação acima é a base do modelo auto-regressivo de heteroscedasticidade condicional (ARCH). Entretanto, em termos de estimação de  $\varepsilon_t$  ela não é a mais conveniente, dado que para a realização da estimação conjunta de  $\{y_t\}$  e da variância condicional utiliza-se a técnica de máxima verossimilhança. Assim, uma especificação mais adequada é tratar  $v_t$  como um termo multiplicativo. Logo, a equação pode ser representada da seguinte maneira:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2} \quad (3.2)$$

onde  $\alpha_0$  e  $\alpha_i$  são parâmetros constantes tais que  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  e  $0 \leq \sum \alpha_i \leq 1$ , para que a variância dada por  $\sigma_\varepsilon^2 = \alpha_0 / 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i$ , não seja negativa e/ou explosiva.

Bollerslev (1986) expandiu o modelo (3.2) de maneira a permitir que a variância condicional fosse modelada como um processo autorregressivo de média móvel (ARMA). O modelo auto-regressivo de heteroscedasticidade condicional generalizada (GARCH) é “uma generalização do modelo ARCH, no qual a variância condicional de  $n$  no instante  $t$  depende não somente de perturbações ao quadrado passadas, mas também de variâncias condicionais passadas” (Gujarati, 2005, p.440). A tipificação mais comum é o modelo GARCH(1,1), onde

<sup>2</sup> A identificação do modelo ARMA (p,q) utilizado no estudo seguiu a metodologia apresentada por Box Jenkins (1970).

o primeiro número se refere a defasagem dos termos autorregressivos e o segundo se refere ao número de defasagens no componente de média móvel do modelo. Os modelos GARCH ( $p, q$ ) são especificados como:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t} \quad (3.3)$$

onde  $\sigma_v^2 = 1$  e

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (3.4)$$

As restrições desse modelo são:  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  e  $0 \leq \sum \alpha_i + \sum \beta_i \leq 1$ .

Interessante notar que os modelos GARCH são heteroscedásticos condicionais, mas têm uma variância incondicional constante.

Para especificação dos modelos GARCH, é necessário que se assuma a distribuição condicional dos termos de erro  $\varepsilon_t$ . A literatura emprega, usualmente, as distribuições: i) Normal, ii)  $t$  de Student e/ou iii) distribuição dos erros generalizados.

Para uma dada distribuição, estima-se o modelo pelo método de máxima verossimilhança. Por exemplo, para um modelo GARCH (1,1), com  $T$  observações, onde se assume a distribuição normal dos termos de erro, tem-se a log-verossimilhança dada por:

$$\log L = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t - a_0 - y_{t-1}\phi)^2 / h_t \quad (3.5)$$

No caso da assunção da distribuição  $t$  de Student tem-se:

$$\log L = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi(v-2)\Gamma(v/2)^2}{\Gamma((v+1)/2)^2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t - \frac{(v+1)}{2} \log\left(1 + \frac{(y_t - a_0 - y_{t-1}\phi)^2}{h_t(v-2)}\right) \quad (3.6)$$

onde  $v$  é o número de graus de liberdade e  $\Gamma(x)$  é a função Gamma usual, ou seja,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy.$$

O presente artigo utiliza as estimações do modelo GARCH considerando os métodos da máxima verossimilhança baseada na distribuição normal<sup>3</sup>.

#### 4. MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA (MVE)

Segundo Morettin (2004, p.164) “os modelos da família GARCH supõem que a variância condicional depende dos retornos passados”. O modelo de volatilidade estocástica (MVE), primeiro proposto por Taylor (1986), não faz essa suposição. Este modelo tem como premissa que a volatilidade presente depende de seus valores passados, mas que é independente dos retornos passados. Considerando o preço do ativo financeiro em  $t$  ( $S_t$ ), o modelo de volatilidade estocástica em tempo discreto, apresentado por Harvey, Ruiz e Shephard (1994), pode ser escrito como:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.1)$$

onde  $y_t$  representa o retorno contínuo do ativo no período  $t$ , calculado por  $y_t = \ln(S_t / S_{t-1})$ , e o  $\log \sigma^2$  segue um processo AR(1). Assume-se que  $\varepsilon_t$  é uma série de termos aleatórios independentes e identicamente distribuídos (iid). Usualmente,  $\varepsilon_t$  é especificado para ter uma distribuição padrão, então sua variância,  $\sigma_\varepsilon^2$  é desconhecida. Portanto, para uma distribuição

<sup>3</sup> Foram testados, também, os modelos baseados na distribuição  $t$  de Student e as diferenças nos resultados encontrados não são significativas.

normal,  $\sigma_\varepsilon^2$  é igual a um, enquanto que, para uma distribuição  $t$ , com  $\nu$  graus de liberdade, será  $\nu/(\nu-2)$ . Seguindo a convenção da literatura, pode-se escrever:

$$y_t = \sigma \varepsilon_t e^{0,5h_t} \quad (4.2)$$

onde  $h_t$  é a volatilidade logarítmica em  $t$  e  $\sigma$  é um fator escalar constante, por isso não há necessidade de uma constante no termo auto-regressivo estacionário de primeira ordem, conforme a seguinte equação:

$$h_{t+1} = \Phi h_t + \eta_t, \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2), |\Phi| < 1 \quad (4.3)$$

Se  $\varepsilon_t$  tem variância finita, a variância de  $y_t$  é dada por:

$$Var(y_t) = \sigma^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{(\sigma_h^2/2)} \quad (4.4)$$

onde  $\sigma_h^2$  é a variância de  $h_t$ .

Uma das vantagens do modelo em tempo discreto de volatilidade estocástica é que ele é análogo aos modelos de tempo contínuo utilizados em artigos de formação de preços de opções, como em Hull e White (1987). As propriedades econométricas básicas dos MVE são discutidas em Taylor (1986, 1994), Shephard (1996), Ghysels, Harvey, e Renault (1996) e Jacquier, Polson, e Rossi (1994). Uma das características chave desse modelo é que ele pode ser linearizado, aplicando-se o logaritmo ao quadrado das observações em (4.2):

$$\log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2 + \log \sigma^2 \quad (4.5)$$

Posteriormente, o termo  $E(\log \varepsilon_t^2)$  é somado e subtraído da expressão (4.5), e se chega a:

$$\log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2) + \log \sigma^2 + E(\log \varepsilon_t^2) \quad (4.6)$$

A representação dessa expressão pode ser escrita como:

$$\log y_t^2 = k + h_t + \xi_t \quad (4.7)$$

onde  $k = \log \sigma^2 + E(\log \varepsilon_t^2)$  e  $\xi_t = \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2)$ .

Conforme apresentado em Harvey, Ruiz e Shephard (1994) a forma de espaço de estado dada pelas equações (4.3) e (4.7) fornecem a base para a estimação dos parâmetros do modelo via a aplicação do filtro de Kalman. Harvey, Ruiz e Shephard (1994) estimaram os parâmetros  $\theta = (\Phi, \sigma_\eta^2) \in (-1, 1)$ , maximizando seguinte função de quase verossimilhança:

$$\log L_Q(y | \theta) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log F_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n v_t^2 / F_t \quad (4.8)$$

onde  $y = (y_1, y_2, \dots)$ ,  $v_t$  é a projeção do erro um passo a frente para o melhor estimador do  $\log y_t^2$  e  $F_t$  é o erro quadrático correspondente.

A estimação realizada pelo método de quase máxima verossimilhança é consistente e assintoticamente segue uma distribuição normal. Na próxima seção são detalhadas as características da amostra, com dados de mercado de ações, utilizada para a aplicação dos modelos apresentados.

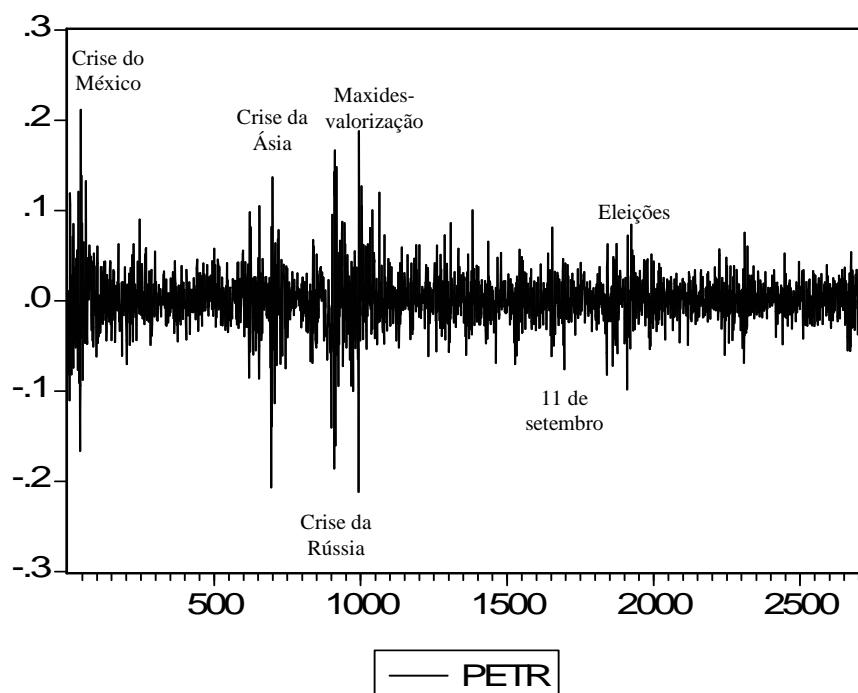
## 5. DESCRIÇÃO DOS DADOS

Para a aplicação dos modelos de volatilidade para o cálculo do valor em risco (VaR) foi selecionada a ação preferencial da Petrobrás (Petr4) dada sua alta liquidez e número de

dias de negociação com uma ampla janela de dados disponível. Os dados são diários (dias úteis) e abrangem o período de 02/01/1995 a 12/01/2006, totalizando 2729 observações.

Alexander (2005, p.90) relata que “no modelo GARCH há uma dicotomia entre se ter dados suficientes para que as estimativas dos parâmetros sejam estáveis, conforme a janela de dados móvel, e dados em excesso, de forma que as previsões não reflitam apropriadamente as condições correntes de mercado”. A amostra selecionada representa uma janela de onze anos para aplicação dos modelos, pois se priorizou a estabilidade dos parâmetros. A figura 2 expressa o comportamento da série de retornos selecionada, destacando eventos que provocaram gruppamentos de alta volatilidade.

**Figura 2: Retorno Contínuo da Petrobrás PN**



Inicialmente foram realizados testes para a identificação da existência ou não de raiz unitária e de heteroscedasticidade condicional na série para a adequada aplicação dos modelos. Pelos testes realizados (Dickey e Fuller aumentado, Phillips e Perron, KPSS e correlograma dos retornos ao quadrado) pode-se dizer que a série é estacionária e heterocedástica, o que a qualifica para a aplicação dos modelos em análise (ver anexo).

## 6. ESPECIFICAÇÃO DOS MODELOS

Nesta seção são especificados os modelos GARCH e de volatilidade estocástica utilizando a amostra de dados acima mencionada.

A especificação do modelo combinado AR(1) e GARCH (1,1) foi feita com o auxílio do programa *EViews*. O modelo AR(1) especificado foi:

$$y_t = 0,132674y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.1)$$

(0,01992)

Os seguintes procedimentos foram seguidos para a estimação do modelo GARCH completo:

- O modelo AR(1) foi estimado seguindo o método sugerido por Box e Jenkins (1970);

- A defasagem do modelo GARCH foi verificada a partir da análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos quadrados, resultando em um modelo GARCH (1,1) sendo especificado pela sua parcimônia e porque modelos de maior defasagem não apresentaram convergência satisfatória;
- Foi realizado o teste  $t$  dos parâmetros estimados, rejeitando-se a hipótese nula de igualdade a zero;

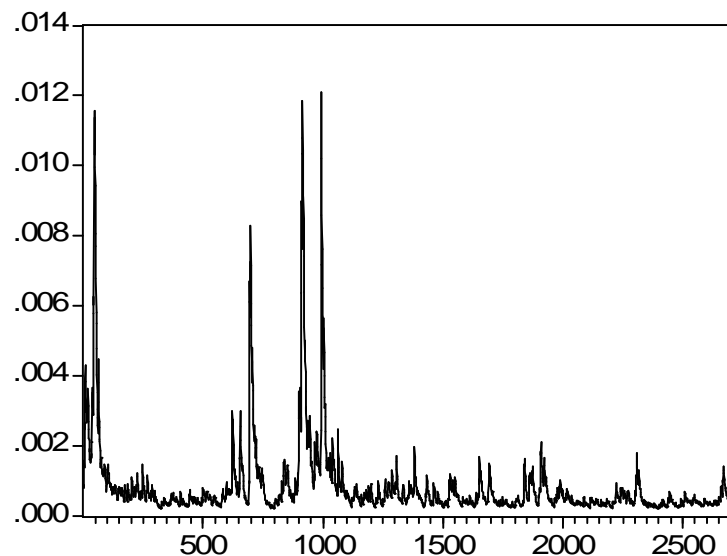
$$h_t = 0,0000247 + 0,12972\varepsilon_{t-1}^2 + 0,83784h_{t-1} \quad (6.2)$$

(0,0000038) (0,00813) (0,01115)

- As restrições do modelo foram atendidas, pois as estimativas dos parâmetros são positivas e a soma menor do que 1;
- Verificou-se na função de autocorrelação dos resíduos a inexistência de autocorrelação através do teste Ljung Box;
- Nos testes dos resíduos quadrados verificou-se a existência de autocorrelação (Ljung-Box), e através do teste LM rejeitou-se a hipótese nula de inexistência de autocorrelação nos resíduos quadrados;
- No teste Jarque-Bera de normalidade dos resíduos padronizados, foi possível verificar no histograma que a distribuição dos resíduos é leptocúrtica, rejeitando-se a hipótese de normalidade.

De acordo com os testes, o modelo GARCH (1,1) é adequado para a estimativa da volatilidade condicional, e será usado para o cálculo do VaR. A figura abaixo contém a previsão estática um passo a frente da variância condicional com base no modelo especificado.

**Figura 3:: Previsão um passo a frente da variância condicional**



Fonte: elaboração própria

A especificação do modelo de volatilidade estocástica (MVE) foi feita com o auxílio do programa *STAMP*. Na estimação deste modelo, surge um problema de ordem prática, que é a existência de zeros na série de dados. Como os cálculos são realizados em logaritmos, os valores dos retornos não podem ser nulos. A seguinte transformação sugerida por Breidt e Carriquiry (1994) foi utilizada para contornar o problema:



$$\log y_t^2 \cong \log(y_t^2 + cs_y^2) - cs_y^2 / (y_t^2 + cs_y^2), t = 1, 2, \dots, T \quad (6.3)$$

onde  $s_y^2$  é a variância amostral de  $y$  e  $c$  é um pequeno número (no STAMP é 0,02).

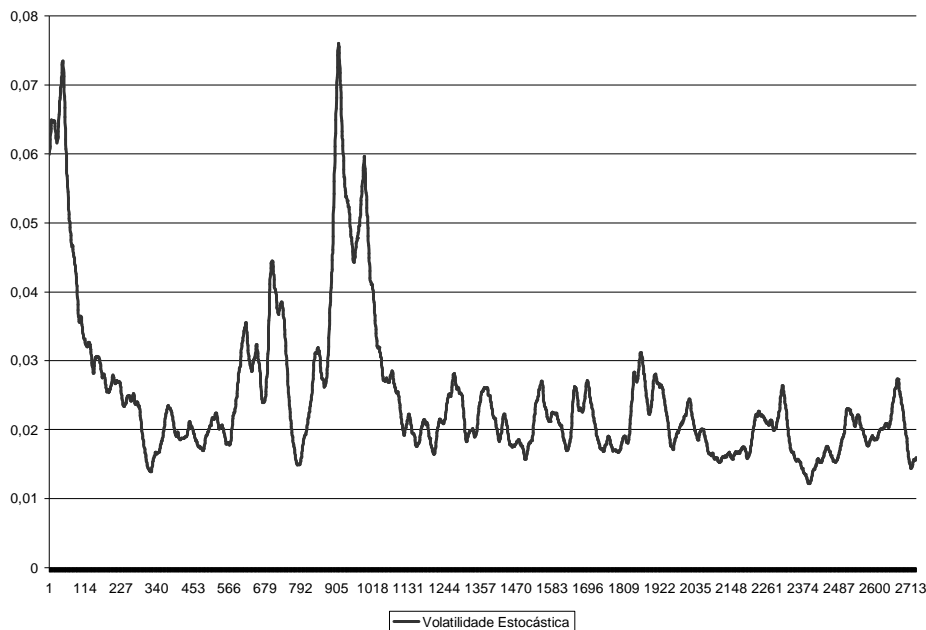
Após a realização da transformação, o modelo é estimado a partir do método de quase máxima verossimilhança via filtro de Kalman, o que resultou nas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log y_t^2 = \kappa + h_t + \zeta_t \rightarrow \log y_t^2 = -8,5769 + h_t + \zeta_t \\ h_{t+1} = \Phi h_t + \eta_t \rightarrow h_{t+1} = 0,986323h_t + \eta_t \end{array} \right.$$

O modelo convergiu muito fortemente em 14 iterações. O desvio-padrão estimado de  $\zeta_t$  é de 1,6888 e o desvio-padrão estimado de  $\eta_t$  é de 0,13382. Importante salientar que o teste de Ljung-Box aplicado aos resíduos estimados pelo modelo sugere a não autocorrelação. O valor obtido no componente auto-regressivo, de 0,9863 é bastante elevado e sugere que existe uma equivalência de ajustamento entre os modelos GARCH(1,1) e o MVE.

A figura 4 apresenta o MVE para os retornos da Petrobras. Pode-se verificar, assim como no caso do modelo GARCH, a existência de agrupamentos de volatilidade expressivos em determinados eventos, entretanto o nível geral de volatilidade do MVE parece ser mais estável.

**Figura 4: MVE para os retornos da Petrobras**



Fonte: elaboração própria

Assim, para o caso em análise tanto o modelo GARCH (1,1) quanto o modelo de volatilidade estocástica se mostraram adequados para a estimação do Valor em Risco. Nesse sentido, a próxima seção compara por meio de *backtesting* o VaR baseado na metodologia do Riskmetrics (1999), que é bastante difundida no mercado, com o VaR baseado nas metodologias GARCH e MVE.

## 7. BACKTESTING

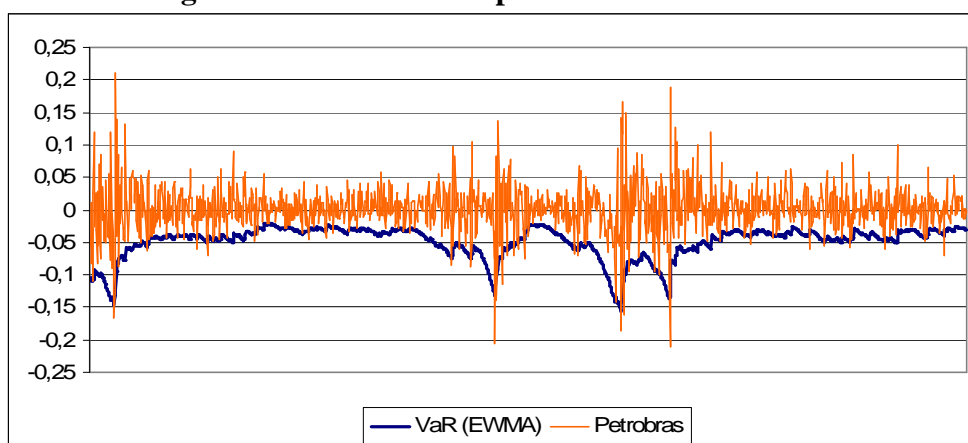
De acordo com o manual do Riskmetrics (1999), o *backtesting* compara os resultados realizados com as medidas geradas pelo modelo, com o intuito de medir a eficácia do modelo utilizado pelas instituições.

Um dos métodos usados para avaliar a eficiência de modelos através de teste com realizações passadas é teste de violações dos limites de VaR, pelo o número de excessos fora do intervalo de confiança.

O teste utiliza o valor da carteira marcada a mercado, contando o número de vezes que os retornos da carteira excederam o intervalo de confiança estipulado para o VaR. O número de violações pode ser discriminado em: limites superiores, quando o retorno exceder o intervalo de confiança no lado direito da cauda, e limites inferiores, quando o retorno for mais negativo do que o retorno crítico determinado pelo VaR. Neste trabalho aplica-se o teste de violação para limites inferiores, utilizando os retornos marcados a mercado das ações de Petrobras para uma janela de 1500 observações. Desta maneira é possível comparar o comportamento dos modelos GARCH e Riskmetrics quanto a sua eficiência.

A figura seguinte mostra os retornos de Petrobras e o VaR calculado pelo modelo Riskmetrics, com volatilidade estimada através de suavização exponencial – EWMA<sup>4</sup>, com fator de decaimento  $\lambda = 0,94$ . É possível perceber que nos momentos de maior volatilidade, os retornos da Petrobras excedem os limites inferiores do VaR.

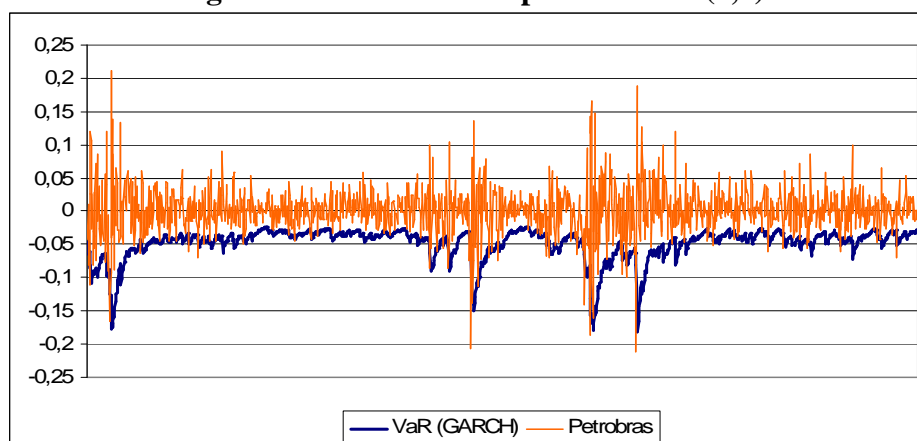
**Figura 5: VaR calculado pelo Riskmetrics/EWMA**



Fonte: elaboração própria

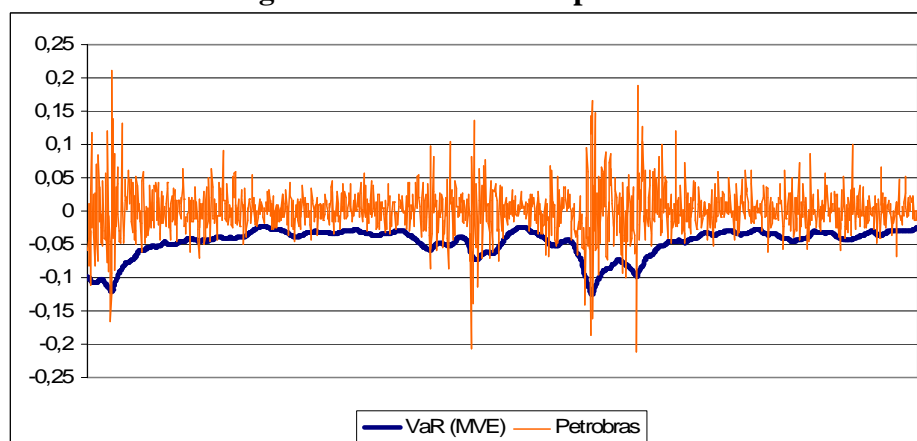
A figura seguinte apresenta o VaR calculado através do modelo GARCH (1,1) e as violações de limites.

<sup>4</sup> EWMA: *Exponential Weighted Moving Average*.

**Figura 6: VaR calculado pelo GARCH(1,1)**

Fonte: elaboração própria

A figura 7 apresenta o VaR calculado através do MVE e suas respectivas violações de limites.

**Figura 7: VaR calculado pelo MVE**

Fonte: elaboração própria

Os resultados do teste de violação dos limites mostraram que em 4,54% das observações os retornos da Petrobras excederam os limites do VaR calculado com o GARCH, em 3,87% os retornos excederam os limites do VaR calculado com o MVE e somente 3,20% das observações excedeu os limites do VaR calculado pelo EWMA. É importante salientar que esses resultados são indicativos para uma amostra e comparando-os não é possível concluir qual dos modelos é mais eficiente, mas é possível inferir que o VaR calculado pelo EWMA, através do modelo proposto pelo Riskmetrics, sofreu menos violações de limites do que o VaR calculado com a volatilidade prevista pelo GARCH (1,1) e pelo MVE. Entretanto, é importante lembrar que todos os modelos testados permaneceram dentro do nível de significância de 5% utilizado no VaR.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foram apresentados 3 modelos utilizados para a estimativa da volatilidade: modelo de suavização exponencial – EWMA, modelo volatilidade condicional – GARCH e o modelo de volatilidade estocástica – MVE. A volatilidade estimada pelos modelos é base para

o cálculo do VaR que é uma métrica bastante utilizada por instituições financeiras e empresas com exposições para avaliar o risco de perdas prováveis de suas carteiras, ocasionadas pelas variações nos preços dos ativos. A medida do VaR depende da volatilidade, do horizonte de tempo e do intervalo de confiança para os retornos contínuos calculados através das diferenças logarítmicas dos preços dos ativos.

Para a avaliação empírica foi utilizada uma amostra com os preços da ação preferencial da Petrobras para a especificação do modelo auto-regressivo de heteroscedasticidade condicional generalizada e de volatilidade estocástica. Tanto o modelo GARCH, quanto o MVE se mostraram adequados para a modelagem da volatilidade. Adicionalmente realizou-se o *backtest* de violação dos limites para um VaR de 5% calculado um passo a frente, com intuito de comparar a eficiência dos modelos GARCH e MVE com o modelo proposto pelo Riskmetrics, o EWMA. Os resultados dos testes não foram conclusivos, mas verificou-se que o VaR calculado pelo EWMA sofreu um menor número de violações do que o calculado pelo GARCH e pelo MVE, para uma janela de 1500 observações. O modelo sugerido pelo Riskmetrics (1999), que utiliza a volatilidade calculada através da suavização exponencial, além de ser favorecido pela simplicidade em sua implementação, não forneceu resultados inferiores no teste de violação, comparado a modelos mais sofisticados de estimação de volatilidade.

Para trabalhos posteriores sugere-se a utilização de carteiras com mais de um ativo, ou a verificação dos modelos para horizontes de projeção maiores do que 1 dia.

## REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. *Modelos de Mercado: Um guia para a análise de informações financeiras*. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.
- BOLLERSLEV, T. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics* 31. 1986, p.307-327.
- BOX, G.E, JENKINS, G.M. *Time series analysis: forecasting and control*. San Francisco: Holden Day, 1970.
- BREIDT, F.J., CARRIQUIRY, A.L. *Improved quasi-maximum likelihood estimation for stochastic volatility models*. In LEE, J.C., Zellner, A. (Eds.), *Modeling and prediction: honoring Seymour Geisser*, p.228-247. New York: Springer, 1994.
- ENDERS, W. *Applied econometric time series*. New York: John Wiley & Sons Inc, 2004.
- ENGLE, R.F. *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. *Econometrica* 50. 1982, p.987-1007.
- GHYSELS, E., HARVEY, A. C., RENAULT, E. *Stochastic volatility*. In RAO, C. R., MADDALA G. S. (Eds.), *Statistical methods in finance*, p.119-191. Amsterdam: North-Holland, 1996.
- GUJARATI, D.N. *Econometria básica*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2004.
- HARVEY, A.C., RUIZ, E., SHEPHARD, N. *Multivariate stochastic variance models*. *Review of Economic Studies* 61. 1994, p.247-264.
- HULL, J., WHITE, A. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*. *Journal of Finance* 42. 1987, p.281-300.
- JACQUIER, E., POLSON, N. G., ROSSI, P. E. *Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion)*. *Journal of Business and Economic Statistics* 12. 1994, p.371-417.
- JORION, P. *Value at Risk*. New York: Mcgraw Hill, 2001.

- MORETTIN, P.A., TOLOI, C.M.C. *Análise de séries temporais*. São Paulo: Editora Edgard Blücher do Brasil, 2004.
- MORETTIN, P.A. *Econometria Financeira* (disponível em [www.ime.usp.br/pam](http://www.ime.usp.br/pam)). São Paulo, 2004.
- RISKMETRICS. *Risk management: a practical guide*. 1.ed. NewYork: RMG, 1999
- SHEPHARD, N. *Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility*. In COX, D. R., BARNDORFF-NIELSON, O.E., HINKLEY, D.V. (Eds.), *Time series models in econometrics, finance and other fields*, p. 1-67. London: Chapman & Hall, 1996.
- SPANOS, A. *Statistical foundations of econometric models*. Cambridge: University Press, 1986.
- TAYLOR, S. J. *Modelling financial time series*. Chichester: John Wiley, 1986.
- TAYLOR, S. J. *Modelling stochastic volatility*. *Mathematical Finance* 4. 1994, p.183-204.

**ANEXOS**

i) Autocorrelação da série

O correlograma dos retornos da ação é apresentado abaixo:

Included observations: 2729

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.113	0.113	35.014	0.000
		2	-0.038	-0.051	38.869	0.000
		3	-0.069	-0.060	52.003	0.000
		4	-0.042	-0.029	56.823	0.000
		5	-0.033	-0.031	59.878	0.000
		6	-0.037	-0.037	63.532	0.000
		7	0.020	0.021	64.581	0.000
		8	0.051	0.039	71.604	0.000
		9	0.044	0.030	77.015	0.000
		10	0.020	0.015	78.134	0.000
		11	-0.015	-0.011	78.749	0.000
		12	0.002	0.013	78.756	0.000
		13	-0.013	-0.008	79.254	0.000
		14	-0.011	-0.004	79.572	0.000
		15	0.038	0.041	83.463	0.000
		16	-0.006	-0.020	83.574	0.000
		17	0.028	0.029	85.800	0.000
		18	-0.004	-0.010	85.847	0.000
		19	0.018	0.021	86.691	0.000
		20	0.003	0.003	86.714	0.000
		21	0.008	0.013	86.893	0.000
		22	-0.038	-0.040	90.925	0.000
		23	-0.040	-0.030	95.431	0.000
		24	0.016	0.020	96.120	0.000
		25	0.025	0.013	97.812	0.000
		26	0.027	0.019	99.890	0.000
		27	0.012	0.004	100.29	0.000
		28	-0.009	-0.010	100.49	0.000
		29	-0.023	-0.019	101.90	0.000
		30	-0.009	0.002	102.13	0.000
		31	-0.031	-0.025	104.72	0.000
		32	-0.028	-0.024	106.89	0.000
		33	-0.026	-0.027	108.75	0.000
		34	-0.019	-0.028	109.72	0.000
		35	-0.042	-0.048	114.53	0.000
		36	-0.015	-0.018	115.19	0.000

Pela análise da fac e da facp não fica muito claro qual o modelo que o comportamento dessas funções representa. Contudo pode-se perceber uma diminuição significativa tanto na fac quanto na facp na primeira defasagem da série. Nesse contexto são estimados os modelos AR(1), MA(1) e ARMA(1,1) e analisados os respectivos critérios de informação para a seleção do modelo a ser estimado com o GARCH:

Variable	Modelo ARMA(1,1)			
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.058242	0.153047	-0.380551	0.7036
MA(1)	0.179051	0.150903	1.186528	0.2355
R-squared	0.012326	Mean dependent var		0.001218
Adjusted R-squared	0.011964	S.D. dependent var		0.028971
S.E. of regression	0.028797	Akaike info criterion		-4.256375
Sum squared resid	2.260544	Schwarz criterion		-4.252041
Log likelihood	5807.696	Durbin-Watson stat		2.003717
Inverted AR Roots	-.06			
Inverted MA Roots	-.18			

Modelo AR (1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.114847	0.019009	6.041861	0.0000
R-squared	0.011464	Mean dependent var		0.001218
Adjusted R-squared	0.011464	S.D. dependent var		0.028971
S.E. of regression	0.028804	Akaike info criterion		-4.256236
Sum squared resid	2.262518	Schwarz criterion		-4.254069
Log likelihood	5806.505	Durbin-Watson stat		1.989847
Inverted AR Roots	.11			

Modelo MA (1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0.122887	0.019000	6.467663	0.0000
R-squared	0.012546	Mean dependent var		0.001196
Adjusted R-squared	0.012546	S.D. dependent var		0.028988
S.E. of regression	0.028806	Akaike info criterion		-4.256124
Sum squared resid	2.263601	Schwarz criterion		-4.253957
Log likelihood	5808.481	Durbin-Watson stat		2.004299
Inverted MA Roots	-.12			

Baseando-se na significância dos coeficientes estimados, bem como nos critérios de informação dos modelos, optou-se por utilizar a especificação AR(1) para a série.

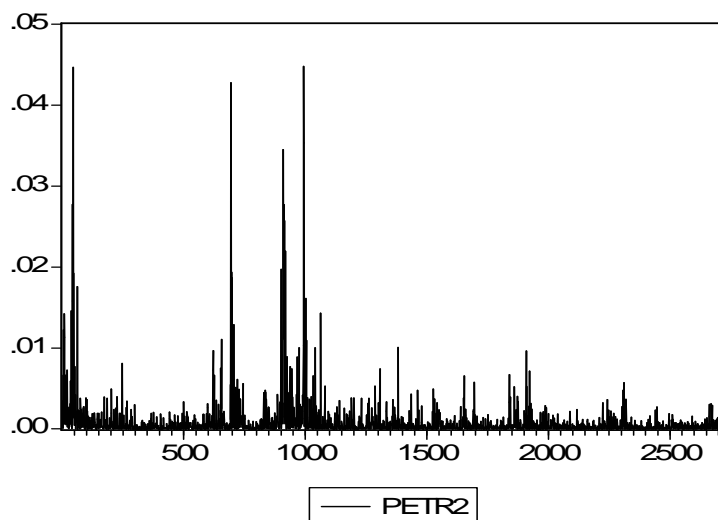
ii) Análise da série para a adequação de um modelo GARCH

O correlograma dos retornos ao quadrado da ação é apresentado abaixo:

Included observations: 2729

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.341	0.341	317.46	0.000
		2	0.335	0.248	624.20	0.000
		3	0.297	0.153	865.26	0.000
		4	0.205	0.022	980.12	0.000
		5	0.227	0.080	1120.7	0.000
		6	0.163	0.008	1193.1	0.000
		7	0.139	0.005	1245.9	0.000
		8	0.164	0.057	1319.6	0.000
		9	0.205	0.114	1434.3	0.000
		10	0.159	0.019	1503.4	0.000
		11	0.126	-0.023	1547.2	0.000
		12	0.163	0.051	1619.8	0.000
		13	0.078	-0.053	1636.3	0.000
		14	0.114	0.018	1671.9	0.000
		15	0.120	0.042	1711.1	0.000
		16	0.053	-0.036	1718.8	0.000
		17	0.096	0.015	1744.0	0.000
		18	0.097	0.030	1769.7	0.000
		19	0.084	0.011	1789.1	0.000
		20	0.102	0.022	1817.7	0.000
		21	0.047	-0.043	1823.7	0.000
		22	0.065	0.011	1835.3	0.000
		23	0.100	0.053	1862.6	0.000
		24	0.070	-0.002	1876.2	0.000
		25	0.083	0.027	1895.0	0.000
		26	0.097	0.034	1921.0	0.000
		27	0.108	0.033	1953.3	0.000
		28	0.099	0.012	1980.5	0.000
		29	0.075	-0.025	1996.0	0.000
		30	0.092	0.028	2019.4	0.000
		31	0.075	0.006	2034.8	0.000
		32	0.065	-0.022	2046.4	0.000
		33	0.084	0.034	2066.0	0.000
		34	0.081	0.020	2084.2	0.000
		35	0.076	-0.008	2100.3	0.000
		36	0.102	0.042	2129.3	0.000

A série dos retornos ao quadrado apresenta forte autocorrelação, o que dá indícios de que o modelo auto-regressivo de heteroscedasticidade condicional generalizada pode ser utilizado para a melhor modelagem da série. O gráfico da série de retornos ao quadrado apresenta grupamentos característicos do GARCH:



iii) Testes de Raiz unitária da Série:

**Teste ADF – Modelo com intercepto e tendência**

Null Hypothesis: PETR has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-31.79295	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.961409	
5% level	-3.411456	
10% level	-3.127584	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(PETR)

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 4 2729

Included observations: 2726 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PETR(-1)	-0.988080	0.031079	-31.79295	0.0000
D(PETR(-1))	0.103309	0.025471	4.055912	0.0001
D(PETR(-2))	0.059656	0.019120	3.120107	0.0018
C	0.000799	0.001102	0.725248	0.4684
@TREND(1)	3.02E-07	6.99E-07	0.432184	0.6656
R-squared	0.447128	Mean dependent var		-8.18E-07
Adjusted R-squared	0.446315	S.D. dependent var		0.038593



S.E. of regression	0.028717	Akaike info criterion	-4.260837
Sum squared resid	2.243884	Schwarz criterion	-4.249996
Log likelihood	5812.521	F-statistic	550.1436
Durbin-Watson stat	1.999082	Prob(F-statistic)	0.000000

**Conclusão: Pelo teste de raiz unitária de Dickey-Fuller aumentado (ADF) não se pode aceitar a hipótese nula de que há uma raiz unitária na série de retornos da ação a 1%, 5% e 10% de significância. As conclusões são as mesmas para o modelo sem intercepto e tendência e com intercepto.**

#### Teste PP – Modelo com intercepto e tendência

Null Hypothesis: PETR has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Bandwidth: 11 (Newey-West using Bartlett kernel)

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-46.33250	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.961407	
5% level	-3.411454	
10% level	-3.127583	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000828
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000664

#### Phillips-Perron Test Equation

Dependent Variable: D(PETR)

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 2 2729

Included observations: 2728 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PETR(-1)	-0.886767	0.019019	-46.62638	0.0000
C	0.000693	0.001103	0.628217	0.5299
@TREND(1)	2.86E-07	7.00E-07	0.408488	0.6829
R-squared	0.443767	Mean dependent var		2.46E-05
Adjusted R-squared	0.443358	S.D. dependent var		0.038593
S.E. of regression	0.028793	Akaike info criterion		-4.256243
Sum squared resid	2.259185	Schwarz criterion		-4.249743
Log likelihood	5808.516	F-statistic		1087.012
Durbin-Watson stat	1.989712	Prob(F-statistic)		0.000000

**Conclusão: Pelo teste de raiz unitária de Phillips-Perron (PP) não se pode aceitar a hipótese nula de que há uma raiz unitária na série de retornos da ação a 1%, 5% e 10% de significância. As conclusões são as mesmas para o modelo sem intercepto e tendência e com intercepto.**

iv) Teste de estacionariedade

No sentido de se confirmar a estacionariedade da série, identificada nos testes de raiz unitária, foi aplicado o teste KPSS, relatado a seguir:

**Teste KPSS – Modelo com intercepto e tendência**

Null Hypothesis: PETR is stationary  
 Exogenous: Constant, Linear Trend  
 Bandwidth: 8 (Newey-West using Bartlett kernel)

	LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic	0.040889
Asymptotic critical values*:	
1% level	0.216000
5% level	0.146000
10% level	0.119000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)	
Residual variance (no correction)	0.000840
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000815

KPSS Test Equation  
 Dependent Variable: PETR  
 Method: Least Squares  
 Sample: 1 2729  
 Included observations: 2729

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000683	0.001110	0.615912	0.5380
@TREND(1)	3.76E-07	7.04E-07	0.533665	0.5936
R-squared	0.000104	Mean dependent var		0.001196
Adjusted R-squared	-0.000262	S.D. dependent var		0.028988
S.E. of regression	0.028992	Akaike info criterion		-4.242870
Sum squared resid	2.292122	Schwarz criterion		-4.238537
Log likelihood	5791.396	F-statistic		0.284798
Durbin-Watson stat	1.771974	Prob(F-statistic)		0.593617

**Conclusão: Pelo teste de estacionariedade de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) aumentado não se pode rejeitar a hipótese nula de que há uma raiz unitária na série de retornos da ação a 1%, 5% e 10% de significância. A conclusão é a mesma para o modelo com intercepto.**

## v) Modelo GARCH

Dependent Variable: PETR  
 Method: ML - ARCH (Marquardt)  
 Sample(adjusted): 2 2729  
 Included observations: 2728 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 15 iterations  
 Variance backcast: OFF

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.132674	0.019922	6.659689	0.0000
Variance Equation				
C	2.47E-05	3.80E-06	6.517232	0.0000
ARCH(1)	0.129720	0.008130	15.95504	0.0000
GARCH(1)	0.837840	0.011150	75.13943	0.0000
R-squared	0.011145	Mean dependent var		0.001218
Adjusted R-squared	0.010056	S.D. dependent var		0.028971
S.E. of regression	0.028825	Akaike info criterion		-4.600617
Sum squared resid	2.263248	Schwarz criterion		-4.591949
Log likelihood	6279.241	Durbin-Watson stat		2.023680
Inverted AR Roots	.13			

## Teste LM dos resíduos

## ARCH Test:

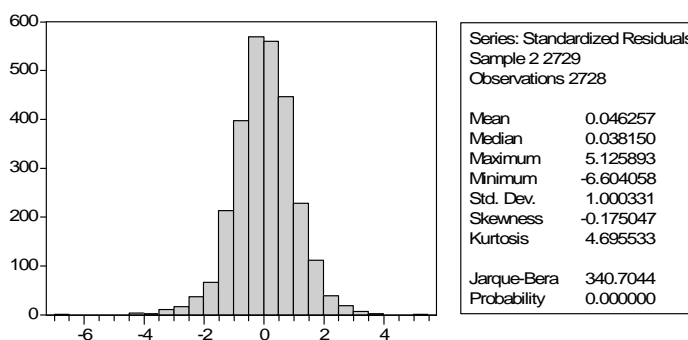
F-statistic	5.419314	Probability	0.004478
Obs*R-squared	10.80755	Probability	0.004500

## Test Equation:

Dependent Variable: STD\_RESID^2  
 Method: Least Squares  
 Sample(adjusted): 4 2729  
 Included observations: 2726 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.938109	0.045594	20.57535	0.0000
STD_RESID^2(-1)	0.001367	0.019126	0.071459	0.9430
STD_RESID^2(-2)	0.062959	0.019129	3.291311	0.0010
R-squared	0.003965	Mean dependent var		1.002573
Adjusted R-squared	0.003233	S.D. dependent var		1.917730
S.E. of regression	1.914627	Akaike info criterion		4.138023
Sum squared resid	9981.968	Schwarz criterion		4.144528
Log likelihood	-5637.125	F-statistic		5.419314
Durbin-Watson stat	1.995807	Prob(F-statistic)		0.004478

## Teste de Normalidade dos Resíduos



vi) Modelo de Volatilidade Estocástica (MVE)

Resultados completos:

Method of estimation is Maximum likelihood

The present sample is: 0 to 2728

MaxLik initialising...

it 1 f= -0.61823 e0= 0.00000 step= 1.00000

MaxLik iterating...

it 4 f= -0.56087 df= 0.00480 e1= 0.00347 e2= 0.11477 step= 1.00000

it 9 f= -0.55836 df= 0.00009 e1= 0.00021 e2= 0.03684 step= 1.00000

it 14 f= -0.55835 df= 0.00000 e1= 0.00000 e2= 0.00000 step= 0.00010

Equation 1.

SVpetr = Level + AR(1) + Irregular

Estimation report

Model with 3 parameters ( 1 restrictions).

Parameter estimation sample is 0. 1 - 2728. 1. (T = 2729).

Log-likelihood kernel is -0.5583489.

Very strong convergence in 14 iterations.

( likelihood cvg 1.789563e-015

gradient cvg 1.219025e-008

parameter cvg 1.623527e-010 )

Eq 1 : Diagnostic summary report.

Estimation sample is 0. 1 - 2728. 1. (T = 2729, n = 2728).

Log-Likelihood is -1523.73 (-2 LogL = 3047.47).

Prediction error variance is 3.04931

Summary statistics

	SVpetr
Std.Error	1.7462
Normality	114.33
H(909)	0.93420
r(1)	-0.0018508
r(39)	0.011165
DW	1.9980
Q(39,37)	38.960
R^2	0.11195

Eq 1 : Estimated variances of disturbances.

Component	SVpetr (q-ratio)
Irr	2.8520 ( 1.0000)
Ar1	0.017907 ( 0.0063)

Eq 1 : Estimated standard deviations of disturbances.

Component	SVpetr (q-ratio)
Irr	1.6888 ( 1.0000)
Ar1	0.13382 ( 0.0792)

Eq 1 : Estimated autoregressive coefficient. *BBR*,

*Braz. Bus. Rev. (Port. ed., Online),*

[www.bbronline.com.br](http://www.bbronline.com.br)

*Vitória, v. 4, n. 1, Art. 5, p. 74 - 95, jan.-abr. 2007*

The AR(1) rho coefficient is 0.986323.

Eq 1 : Estimated coefficients of final state vector.

Variable	Coefficient	R.m.s.e.	t-value
Lvl	-8.5769	0.18600	-46.113 [ 0.0000]
Ar1	-0.76884	0.45764	

Normality test for Residual SVpetr

Sample Size	2728	
Mean	-0.053013	
Std.Devn.	0.998594	
Skewness	-0.257566	
Excess Kurtosis	-0.580191	
Minimum	-3.280796	
Maximum	3.113678	
Skewness Chi <sup>2</sup> (1)	30.163	[0.0000]
Kurtosis Chi <sup>2</sup> (1)	38.263	[0.0000]
Normal-BS Chi <sup>2</sup> (2)	68.425	[0.0000]
Normal-DH Chi <sup>2</sup> (2)	114.33	[0.0000]

Goodness-of-fit results for Residual SVpetr

Prediction error variance (p.e.v)	3.049310
Prediction error mean deviation (m.d)	2.511845
Ratio p.e.v. / m.d in squares	0.938204
Coefficient of determination R <sup>2</sup>	0.111953
... based on differences RD <sup>2</sup>	0.466639
Information criterion of Akaike AIC	1.117114
... of Schwartz (Bayes) BIC	1.123613

Serial correlation statistics for Residual SVpetr.

Durbin-Watson test is 1.99805.

Asymptotic deviation for correlation is 0.019146.

Lag	dF	SerCorr	BoxLjung	ProbChi2(dF)					
1	0	-0.0019			27	24	-0.0182	25.9750	[0.3544]
2	0	0.0213			28	25	-0.0177	26.8430	[0.3638]
3	0	0.0197			29	26	-0.0319	29.6463	[0.2825]
4	1	-0.0394	6.5441	[0.0105]	30	27	0.0433	34.8198	[0.1435]
5	2	0.0128	6.9890	[0.0304]	31	28	-0.0167	35.5886	[0.1534]
6	3	-0.0149	7.5947	[0.0552]	32	29	0.0074	35.7379	[0.1813]
7	4	0.0012	7.5987	[0.1074]	33	30	0.0176	36.5987	[0.1891]
8	5	-0.0104	7.8932	[0.1622]	34	31	-0.0230	38.0570	[0.1790]
9	6	0.0103	8.1829	[0.2250]	35	32	0.0089	38.2765	[0.2059]
10	7	0.0271	10.1904	[0.1780]	36	33	-0.0097	38.5380	[0.2333]
11	8	0.0027	10.2104	[0.2506]	37	34	-0.0008	38.5398	[0.2716]
12	9	-0.0161	10.9238	[0.2810]	38	35	0.0052	38.6145	[0.3096]
13	10	0.0263	12.8205	[0.2339]	39	36	0.0112	38.9597	[0.3380]
14	11	-0.0097	13.0774	[0.2883]	40	37	0.0160	39.6695	[0.3519]
15	12	-0.0182	13.9897	[0.3014]	41	38	0.0167	40.4403	[0.3631]
16	13	-0.0045	14.0456	[0.3706]	42	39	0.0055	40.5251	[0.4029]
17	14	-0.0191	15.0495	[0.3748]	43	40	-0.0124	40.9534	[0.4285]
18	15	-0.0135	15.5496	[0.4126]	44	41	-0.0001	40.9535	[0.4727]
19	16	-0.0163	16.2809	[0.4335]	45	42	-0.0336	44.0926	[0.3832]
20	17	-0.0024	16.2973	[0.5029]	46	43	-0.0027	44.1124	[0.4244]
21	18	-0.0274	18.3652	[0.4319]	47	44	-0.0005	44.1131	[0.4669]
22	19	0.0151	18.9955	[0.4571]	48	45	-0.0148	44.7190	[0.4838]
23	20	0.0163	19.7278	[0.4751]	49	46	0.0259	46.5891	[0.4480]
24	21	-0.0229	21.1722	[0.4485]	50	47	0.0122	47.0029	[0.4724]
25	22	-0.0102	21.4600	[0.4925]					
26	23	-0.0361	25.0574	[0.3473]					

vii) Rotina de programação em VBA para o cálculo da variância condicional do modelo de decaimento exponencial:

```

Function ewma(lambida, retornos As Range)
i = 1
lambida2 = 1
ewma = 0
Do While lambida2 > 0.00001
    ewma = ewma + retornos(i, 1) ^ 2 * lambida2
    lambida2 = lambida2 * lambida
    i = i + 1
Loop
ewma = ewma * (1 - lambida)
End Function
    
```