BBR BRAZILIAN BUSINESS REVIEW
Vol. 4, No. 1
Vitória-ES, Brasil – Jan/ Abr2007 *DOI: http://dx.doi.org/10.15728/bbr.2007.4.1.2*
p. 26-39 ISSN 1807-734X

Análise dos efeitos de não-sincronia de negociação no mercado de capitais brasileiro

Danilo Lopomo Beteto*
Universidade Nova de Lisboa

Daniel Reed Bergmann**
Universidade Presbiteriana Mackenzie

ABSTRACT: Atualmente, a análise e o estudo da microestrutura de mercado é uma das áreas de pesquisa mais intensa em economia e finanças. Um dos aspectos abordados é o mecanismo de negociação dos ativos, tratando-se dos impactos das idiossincrasias observadas em cada mercado. A partir do modelo desenvolvido por Lo e McKinlay (1990), demonstra-se que o processo de não-negociação faz com que haja correlação espúria nas taxas observadas dos retornos, causando uma falsa idéia de previsibilidade. De modo a aproximar o modelo da realidade financeira, estende-se o mesmo para uma Cadeia de Markov de alcance 1 com 2 estados, derivando-se os momentos do processo sob esta nova hipótese. Ainda, demonstra-se que o beta é viesado caso não sejam adotadas as medidas corretivas devidas ao não-sincronismo dos dados. Finalmente, a partir de uma amostra de dados de alta freqüência do mercado brasileiro, analisa-se empiricamente o modelo e extraem-se as probabilidades de negociação dos ativos no estado de equilíbrio.

Palavras-chave: cadeia de Markov, efeito de não-sicronia e previsibilidade.

Recebido em 14/11/2006; revisado em 16/12//2006; aceito em 03/02/2007.

Correspondência com autor:
[¥] *Doutorando em Economia com ênfase em Finanças pela Universidade Nova de Lisboa.*
Campus de Campolide
1099-032 Lisboa
E-mail: danilobeteto@yahoo.com

[♣] *Professor Mestre em Finanças pela Universidade Presbiteriana Mackenzie.*
Rua da Consolação 896 – São Paulo.
CEP: 01302-907 – São Paulo – SP – Brasil.
E-mail: drbergmann@uol.com.br

Nota do Editor: *Este artigo foi aceito por Alexsandro Broedel Lopes.*

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a teoria de microestrutura de mercado é uma das áreas de pesquisa mais ativa em economia e finanças. Para determinados fins, como na mensuração de custos de execução de estratégias de investimento e da liquidez de um determinado ativo / mercado, por exemplo, constitui-se como elemento central[1].

A fim de mensurar os efeitos causados pela hipótese de que o mercado possua um determinado tipo de estrutura, é necessário desenvolver medidas que possam ser estimadas a partir de uma amostra de dados empíricos. Pode-se avaliar o modelo através da plausibilidade econômico-financeira dos resultados obtidos em termos dos parâmetros estimados.

Um dos temas cobertos pela teoria de microestrutura de mercado refere-se ao mecanismo de negociação de ativos, em especial a freqüência de negociação dos mesmos. O não-sicronismo ou o efeito de não-negociação aparece quando são coletadas séries temporais, especialmente de preços de ativos financeiros, em que o intervalo de registro dos dados não corresponde ao intervalo real em que os dados foram efetivamente gerados. Por exemplo, os preços diários de fechamento correspondem àqueles coletados no último instante em que o ativo foi negociado, a despeito destes instantes não serem os mesmos para diferentes ativos.

Conforme citado em Campbell *et al.* (1997), o primeiro a reconhecer a importância do não-sicronismo dos preços foi Fischer (1966). Recentemente, modelos de não-negociação foram desenvolvidos por Atchison *et al.* (1987), Cohen *et al.* (1978), Cohen *et al.* (1979), Cohen *et al.* (1983), Lo *et al.* (1990a), Lo *et al.* (1990b), Lo *et al.* (1998) e Scholes e Williams (1977).

A importância do não-sicronismo de negociação ocorre em função do mesmo viesar os momentos e os co-momentos dos retornos de um ativo tais como os coeficientes da média, variância, covariância, beta, autocorrelação e correlação cruzada. Os estudos iniciais dos efeitos do não-sicronismo foram direcionados às aplicações empíricas do CAPM e do APT. Entretanto, recentemente o foco tem sido a autocorrelação espúria causada pelo não-sicronismo de negociação, criando-se uma falsa impressão de previsibilidade dos retornos mesmo que os retornos reais sejam estatisticamente independentes.

O objetivo do presente artigo[2] é apresentar o modelo de não-negociação desenvolvido em Campbell *et al.* (1997), discutindo os efeitos oriundos do mesmo em alguns tópicos da teoria econômico-financeira e aplicá-lo sobre uma amostra de dados de alta freqüência de ações negociadas na BOVESPA em que à época da análise não pertenciam ao índice. O artigo está disposto da seguinte forma: a seção 2 trata do modelo teórico, fazendo-se uma extensão do modelo original para uma cadeia de Markov de alcance 1 e discute algumas implicações teóricas do modelo ocasionadas no cômputo do beta; a seção 3 trata da estimação do modelo modificado, utilizando-se uma amostra de dados brasileiros; finalmente, a seção 4 apresenta as conclusões do estudo.

2. MODELO DE NÃO-SICRONISMO DE NEGOCIAÇÃO

A abordagem aqui descrita segue o modelo de não-negociação exposto em Lo e McKinlay (1988). Seja N o número de ativos considerados, r_{it}^{o} é a taxa de retorno observável do ativo i no instante t e r_{it} é a taxa de retorno não-observável (taxa de retorno virtual[3]) do ativo i no instante t.

[1] Para referências sobre o tema, consultar o capítulo 3 da obra de Campbell *et al.* (1997).

[2] Este artigo foi apresentado no V Encontro Brasileiro de Finanças em 2005.

[3] As taxas de retorno virtuais representam as mudanças no valor intrínseco do ativo em um mercado onde não há restrições de liquidez. Assim, considera-se que as taxas de retorno virtuais sejam reflexo apenas de informações

A fim de modelar a não-negociação como um resultado puramente estatístico, ignorando-se as razões econômico-financeiras de sua ocorrência, há a necessidade de se supor que em cada período *t* exista uma probabilidade π_i de que o ativo i não seja negociado e que haja independência entre as ocorrências das negociações e o processo estocástico dos retornos virtuais, $\{r_{it}\}$, assim como das demais variáveis aqui consideradas. Portanto, o processo de não-negociação pode ser visto como uma seqüência IID de lançamentos de uma moeda[4], com diferentes probabilidades de negociação para os *N* ativos considerados.

A taxa de retorno observável r_{it}^{o} depende da ocorrência de negociação do ativo *i* no instante *t*. Seja p_{it} o preço do ativo *i* no instante *t*. Se o ativo *i* não é negociado no instante *t*, temos $r_{it}^{0} = \log\left(p_{it} / p_{i(t-1)}\right) = \log 1 = 0$. Caso contrário se houver negociação do ativo *i* no instante *t*, a taxa de retorno observável será a soma das taxas de retorno virtuais no instante *t* e de todos os instantes consecutivos anteriores a *t* em que o ativo *i* não tenha sido negociado. Modelando-se os retornos desta forma, captura-se a característica essencial do processo de não-negociação como a fonte de autocorrelação espúria: as informações afetam primeiramente os ativos que são mais negociados, havendo um *lag* no impacto dos retornos dos ativos com baixa liquidez.

A fim de completar a especificação do modelo de não-negociação, suponha que os retornos virtuais sejam governados pelo modelo linear de 1 fator:

$$r_{it} = \mu_i + \beta_i f_t + \varepsilon_{it} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

sendo f_t um fator de média nula, comum a todos os *N* ativos, e ε_{it} um termo de erro idiossincrático, independente em todos os *lags* e também dos termos de erro dos demais ativos. Como o objetivo é tratar a não-negociação como a única fonte de autocorrelação, assume-se também que o fator comum f_t é IID e independente de ε_{it-k} para todo *i*, *t* e *k*. Assim, o retorno virtual de cada período é aleatório e captura os movimentos causados pela chegada de novas informações assim como o termo de erro idiossincrático.

Para derivar uma expressão explícita dos retornos observados e deduzir suas propriedades de séries-temporais são introduzidas duas variáveis aleatórias:

$$\delta_{it} = \begin{cases} 1 \text{ (Não-Negociação) com probabilidade } \pi_i \\ 0 \text{ (Negociação) com probabilidade } 1-\pi_i \end{cases} \tag{2.2}$$

$$X_{it}(k) = (1-\delta_{it})\delta_{it-1}\delta_{it-2}\ldots\delta_{it-k} \quad \text{com } k > 0.$$

Pela definição de $X_{it}(k)$, temos que:

$$X_{it}(k) = \begin{cases} 1 \text{ com probabilidade } \left(1-\pi_i\right)\pi_i^{k} \\ 0 \text{ com probabilidade } 1-\left(1-\pi_i\right)\pi_i^{k} \end{cases} \tag{2.3}$$

sendo $X_{it}(0) = 1-\delta_{it}$, assumindo-se que $\{\delta_{it}\}$ é independente de $\{\delta_{jt}\}$ para $i \neq j$ e IID no tempo para $i = 1, \ldots, N$.

A variável δ_{it} é uma variável indicadora, assumindo o valor 1 caso o ativo *i* não seja negociado no período *t* e 0 caso contrário. Da mesma forma, $X_{it}(k)$ também é uma variável

---

específicas à companhia e da economia em geral, devendo ser, sob as características citadas do mercado, iguais às taxas de retornos observadas r_{it}^{o}.

[4] Posteriormente, esta hipótese será relaxada, tratando-se o processo de não-negociação como uma cadeia de Markov de alcance 1.

indicadora que assume o valor 1 quando o ativo i é negociado no instante t mas não nos k períodos consecutivos anteriores a t. Como $\pi_i \in (0,1)$ tem-se que, para k grande, a probabilidade $X_{it}(k)$ ser zero será alta, dado que é pouco provável que um ativo não seja negociado ao menos uma vez em um longo período do passado.

De acordo com as novas variáveis introduzidas, podemos expressar r_{it}^{0} como:

$$r_{it}^{0} = \sum_{0}^{\infty} X_{it}(k) r_{it-k} \qquad i = 1,...,N. \tag{2.4}$$

Caso o ativo não seja negociado no instante t teremos $\delta_{it} = 1$, i.e., $X_{it}(k) = 0,\ \forall k,$ o que implica em $r_{it}^{0} = 0.$ Caso o ativo seja negociado no instante t, o retorno observado está sendo igual a soma do retorno virtual no instante t, r_{it}, com os k_t retornos virtuais passados anteriores a t, sendo k_t uma variável aleatória representativa do número de períodos consecutivos anteriores a t em que o ativo i não foi negociado, dada por:

$$k_t = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \delta_{it-j} \right\} \tag{2.5}$$

A despeito da expressão (2.4) ser mais conveniente para os cálculos subseqüentes, a variável k_t pode ser utilizada a fim de que a definição da taxa de retorno observável seja entendida de um modo mais intuitivo, através de:

$$r_{it}^{0} = \sum_{k=0}^{k_t} r_{it-k} \qquad i = 1,...,N. \tag{2.6}$$

Enquanto a expressão (2.4) mostra que o processo da taxa de retorno não-observável é uma função estocástica de todos os retornos virtuais passados, a expressão (2.6) revela que r_{it}^{0} também pode ser entendida como uma soma aleatória de termos aleatórios.

2.1 Implicações no processo de retornos observáveis sob o modelo de não-negociação

A fim de explicitar os efeitos da não-negociação dos ativos sobre as propriedades das séries temporais das taxas de retorno observáveis, tem-se que:

Proposição 1. *Para o processo de não-negociação definido implicitamente pelas expressões* (2.2) e (2.3), *o processo dos retornos observáveis* $\{r_{it}^{0}\}$ $(i = 1,...,N)$ *possui estacionariedade fraca com primeiro e segundo momentos dado por:*

$$E\left[r_{it}^{0}\right] = \mu_i \tag{2.7}$$

$$Var\left[r_{it}^{0}\right] = \sigma_i^2 + \frac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^2 \tag{2.8}$$

$$Cov\left[r_{it}^{0}, r_{jt+n}^{0}\right] = \begin{cases} -\mu_i^2 \pi_i^n & \text{para } i = j,\ n > 0 \\ \dfrac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j} \beta_i \beta_j \sigma_f^2 \pi_j^n & \text{para } i \neq j,\ n \geq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$Corr\left[r_{it}^{0}, r_{it+n}^{0}\right] = \frac{-\mu_i^2 \pi_i^n}{\sigma_i^2 + \dfrac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^2}, \quad n > 0 \tag{2.10}$$

sendo $\sigma_i^2 \equiv Var[r_{it}]$ e $\sigma_f^{\,2} \equiv Var[f_t]$, $E[\cdot]$, $Var[\cdot]$, $Cov[\cdot]$, $Corr[\cdot]$ *são os operadores esperança, variância, covariância e correlação.*

Demonstração. Ver Apêndice 1. ■

De (2.7) até (2.10) verifica-se que a não-negociação não afeta o valor esperado do processo das taxas de retorno observáveis, aumentando a variância em função de $2\pi_i\mu_i^2/(1-\pi_i)>0$. Ainda, pode-se depreender da expressão (2.10) que na hipótese do valor esperado da taxa de retorno observável do ativo ser maior que zero, i.e., $\mu_i>0$, a não-negociação induz a uma autocorrelação negativa nas taxas de retornos observáveis para qualquer *lag* observado, sendo que tal autocorrelação decai exponencialmente. A intuição por trás deste resultado segue do fato que durante os períodos em que não há negociação do ativo, a taxa de retorno observada é nula e durante os períodos em que o ativo é negociado, a taxa de retorno observada reverte para a média da taxa de retorno acumulada, sendo que esta reversão à media ocasiona a correlação serial negativa. Para $\mu_i=0$ não há reversão à media e, desta forma, não há correlação serial negativa.

2.2 Expansão do modelo de não-negociação para uma cadeia de Markov de alcance 1

A fim de relaxar a hipótese de que o processo de negociação $\{\delta_{it}\}$ seja IID[5], admite-se agora que o mesmo siga uma cadeia de Markov de alcance 1 com 2 estados, sendo as probabilidades de transição dadas por:

$$\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{\delta_{it}} \\ & & 0 & 1 \\ \delta_{it-1} & 0 & \pi_i & 1-\pi_i \\ & 1 & 1-\pi_i' & \pi_i' \end{array} \tag{2.11}$$

Podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2. *Sejam* P_{it} e Q_{it} *as probabilidades não condicionadas de* $\delta_{it}=0$ e $\delta_{it}=1$, *respectivamente. Ainda, sejam* P_i e Q_i *probabilidades do estado de equilíbrio. Sob as hipóteses do parágrafo anterior, tem-se que:*

$$P_i=\frac{1-\pi_i'}{2-(\pi_i+\pi_i')} \tag{2.12}$$

$$Q_i=\frac{1-\pi_i}{2-(\pi_i+\pi_i')} \tag{2.13}$$

Ainda:

$$E[\delta_{it}]=Q_i \tag{2.14}$$

$$Var[\delta_{it}]=Q_i(1-Q_i) \tag{2.15}$$

$$Corr[\delta_{it},\delta_{it-1}]=Q_i(\pi_i'-Q_i) \tag{2.16}$$

Demonstração. Ver Apêndice 2. ■

De posse de tais resultados, da mesma forma como foi feito na subseção anterior, obtém-se os momentos da taxa de retorno observável. Temos:

[5] Tal hipótese é extremamente forte, principalmente, quando o ativo negociado for de baixa liquidez, a menos que se considere um mercado onde não exista assimetria de informação ou que a mesma se dissemine de forma lenta no mercado. Caso contrário, a negociação de um ativo com baixa liquidez, baseada em informação privilegiada, alteraria a probabilidade de ocorrência de negociação do mesmo ativo no instante seguinte.

Proposição 3. *Admitindo-se que o processo de não-negociação* $\{\delta_{it}\}$ *siga uma Cadeia de Markov de alcance 1 com 2 estados, com probabilidades de transição dadas por* (2.11) *e probabilidades do estado de equilíbrio segundo a proposição anterior, temos:*

$$E\left[r_{it}{}^{0}\right]=\mu_i\left(\pi_i'Q_i+P_i\right) \tag{2.17}$$

$$Var\left[r_{it}{}^{0}\right]=\mu_i{}^2\left[\frac{P_i}{\pi_i\left(1-\pi_i\right)}+\pi_i'Q_i-\left(\pi_i'Q_i+P_i\right)^2\right] \tag{2.18}$$

$$Corr\left[r_{it}{}^{0},r_{it-1}{}^{0}\right]=\mu_i{}^2\left[\pi_i'-\left(\pi_i'Q_i+P_i\right)^2\right] \tag{2.19}$$

Demonstração. Ver Apêndice 2. ■

Vê-se que, *ceteris paribus*, o processo $\{\delta_{it}\}$ diminui a média de r_{it}^{0} visto que $\pi_i'Q_i+P_i<1$ para $0<\pi_i,\ \pi_i'<1$, comparando-se com os resultados obtidos sob a hipótese IID de $\{\delta_{it}\}$.

2.3 Implicações no cálculo do beta

O beta é definido como o coeficiente de inclinação da reta de regressão dos retornos do ativo em relação aos retornos da carteira de mercado. Para evidenciar o impacto da não-negociação dos ativos, assume-se que o processo de não-negociação seja dado por (2.2) e (2.3).

Seja $\beta_{im,t}$ o beta do ativo *i* em relação à carteira de mercado no instante *t*. Temos:

$$\beta_{im,t}=\frac{Cov\left[r_{it}{}^{0},r_{mt}{}^{0}\right]}{Var\left[r_{mt}{}^{0}\right]} \tag{2.20}$$

Mas, pelos resultados anteriores, obtemos:

$$\beta_{im,t}=\frac{\dfrac{\left(1-\pi_i\right)\left(1-\pi_m\right)}{1-\pi_i\pi_m}\beta_i\beta_m\sigma_m{}^2}{\sigma_m{}^2+\dfrac{2\pi_m}{1-\pi_m}\mu_m{}^2}=\frac{\left(1-\pi_i\right)\left(1-\pi_m\right)^2\beta_i\beta_m\sigma_m{}^2}{\left(1-\pi_i\pi_m\right)\left[\sigma_m{}^2\left(1-\pi_m\right)+2\pi_m\mu_m{}^2\right]} \tag{2.21}$$

Notar que $\beta_m=1$, pois se trata do beta da carteira de mercado em relação ao fator da carteira de mercado, i.e., é o beta da carteira de mercado com ela própria. Como $\pi_m\cong 0$, i.e., a probabilidade de não-negociação da carteira de mercado é quase nula (pois envolveria que nenhum dos ativos que a compusessem fosse negociado), simplificaremos a expressão (2.21) em:

$$\beta_{im,t}\cong\frac{\left(1-\pi_i\right)\beta_i\sigma_m{}^2}{\sigma_m{}^2}=\left(1-\pi_i\right)\beta_i \tag{2.22}$$

Caso o ativo em questão seja de alta liquidez, $\pi_i\cong 0,$ o beta se reduz a $\beta_{im,t}\cong\beta_i$, i.e., o beta equivale ao beta calculado sem considerarmos a liquidez dos ativos. Caso contrário, em que a probabilidade de não-negociação do ativo seja próxima de 1, $\beta_{im,t}\cong 0$, devido ao efeito provocado pela falta de liquidez do ativo.

Portanto, o beta será viesado para zero caso o efeito do não-sicronismo dos ativos não for considerado apropriadamente.

3. Aplicação do modelo estendido de não-negociação no mercado de capitais brasileiro

A presente seção trata da aplicação do modelo de não-negociação desenvolvido na seção anterior, particularmente assumindo que o processo de não-negociação $\{\delta_{it}\}$ siga uma cadeia de Markov de alcance 1 com 2 estados. Estaremos interessados particularmente em estimar as probabilidades de transição da cadeia de Markov, obtendo-se uma medida empírica do nível de liquidez dos ativos considerados. Para esse fim, foram escolhidos ativos que à época da análise não pertenciam ao IBOVESPA[6].

Assumindo-se que seja dada uma seqüência $\{\delta_{it}\}_{t=0}^{T}$ de indicadores de não-negociação. Por conveniência, vamos condicionar esta seqüência no indicador inicial de não-negociação, δ_{i0}. Sejam n_{i00}, n_{i01}, n_{i10} e n_{i11} as contagens dos pares de minutos consecutivos em que as variáveis indicadoras seguem o padrão "00", "01", "10", "11", respectivamente. Portanto, $\sum_{j,k=0,1} n_{ijk} = T$. Dado que $\{\delta_{it}\}$ segue uma cadeia de Markov de alcance 1 com probabilidades de transição dadas por (2.11), a função de log-verossimilhança da seqüência $\{\delta_{it}\}_{t=0}^{T}$ é:

$$L\left(\{\delta_{it}\}_{t=0}^{T} \middle| \delta_{i0}\right) = n_{ioo}\ln\pi_i + n_{i01}\ln(1-\pi_1) + n_{i10}\ln(1-\pi_i') + n_{i11}\ln\pi_i' \qquad (3.1)$$

Os estimadores de π_i e π_i' por máxima verossimilhança são:

$$\hat{\pi}_i = \frac{n_{i00}}{n_{i00}+n_{i01}} \qquad (3.2)$$

$$\hat{\pi}_i' = \frac{n_{i11}}{n_{i10}+n_{i11}} \qquad (3.3)$$

e a matriz de informação de Fischer é

$$i(\pi_i,\pi_i') = E\left[\begin{pmatrix} \dfrac{n_{i00}}{\pi_i^2} + \dfrac{n_{i01}}{(1-\pi_i)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n_{i10}}{(1-\pi_i')^2} + \dfrac{n_{i11}}{\pi_i'} \end{pmatrix}\right] \qquad (3.4)$$

Então, as estimativas π_i e π_i' são assintoticamente normais e independentes, com variâncias assintóticas estimadas por:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\pi}_i} = \left[\hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)(n_{i00}+n_{i01})\right]^{-1} \qquad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\pi}_i'} = \left[\hat{\pi}_i'(1-\hat{\pi}_i')(n_{i10}+n_{i11})\right]^{-1} \qquad (3.6)$$

Os dados analisados referem-se ao período de 22/07/02 até 18/09/02. Através da função GIT do terminal da *Bloomberg* foram coletadas as quantidades de negociações, minuto a minuto, das seguintes ações:

BELG4 – Belgo Mineira PN;
CMET4 – Caemi Metal PN;
CNFB4 – Confab PN;

[6] Este critério foi utilizado a fim de distinguir o nível de liquidez dos ativos.

CTNM4 – Coteminas PN;
GOAU4 – Gerdau Met. PN;
LAME4 – Lojas Americanas PN;
PRGA4 – Perdigão PN;
RPSA4 – Ripasa PN.

Conforme citado anteriormente, as ações acima, no período analisado, foram escolhidas por não pertencerem ao índice BOVESPA. As tabelas seguintes compilam os dados e apresentam as estimativas obtidas:

Tabela 1: Seqüências de negociação

Ticker	n_{i0}	n_{i1}	n_{i00}	n_{i01}	n_{i10}	n_{i11}
BELG4	572	18.102	73	499	499	17.603
CMET4	594	17.920	100	654	654	17.266
CNFB4	1.084	17.590	198	886	886	16.704
CTNM4	513	18.161	72	441	441	17.720
GOAU4	914	17.760	136	778	778	16.982
LAME4	418	18.256	80	338	338	17.918
PRGA4	600	18.074	69	531	531	17.543
RPSA4	527	18.147	45	482	482	17.655

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros

Ticker	$\hat{\pi}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{\pi}_i}$	$\hat{\pi}'_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{\pi}'_i}$
BELG4	0,128	0,125	0,972	0,045
CMET4	0,133	0,107	0,964	0,040
CNFB4	0,183	0,079	0,950	0,034
CTNM4	0,140	0,127	0,976	0,048
GOAU4	0,149	0,093	0,956	0,037
LAME4	0,191	0,124	0,981	0,055
PRGA4	0,115	0,128	0,971	0,044
RPSA4	0,085	0,156	0,973	0,046

Depreende-se, para os ativos selecionados, que a probabilidade de que os mesmos não sejam negociados no minuto seguinte dado que não o foram no minuto atual, $\hat{\pi}'_i$, é muito alta, ficando as estimativas acima de 95% para todos os ativos, Da mesma forma, caso haja uma negociação, a probabilidade de que as mesmas continuem ocorrendo, $\hat{\pi}_i$, é baixa (menos de 20%) para todos os ativos da amostra, Intuitivamente, ao menos para a amostra selecionada, parece haver indícios de que as transações não foram motivadas por *insider information:* caso o fossem, após uma transação haveria uma seqüência de negócios que representaria a tentativa dos agentes de se aproveitarem de uma oportunidade de lucro, sob a hipótese de que a microestrutura do mercado possibilite a disseminação rápida da informação,
As probabilidades do estado de equilíbrio, calculadas por (2,12) e (2,13) e através das estimativas das probabilidades de transição, assim como as estimativas "ingênuas"[7] das

[7] A estimativa "ingênua" da probabilidade de não-negociação do ativo é dada pela razão do número de observações em que não houve negociação do ativo em relação ao número total de observações.

probabilidades de negociação e de não-negociação, $P^I(\delta_{it}=0)$ e $P^I(\delta_{it}=1)$, respectivamente, são dadas pela tabela abaixo,

Tabela 3: Probabilidades P_i, Q_i vs Estimativas "ingênuas"

Ticker	P_i	Q_i	$P^I(\delta_{it}=0)$	$P^I(\delta_{it}=1)$
BELG4	0,0306	0,9694	0,0306	0,9694
CMET4	0,0404	0,9596	0,0404	0,9596
CNFB4	0,0580	0,9420	0,0580	0,9420
CTNM4	0,0275	0,9725	0,0275	0,9725
GOAU4	0,0224	0,9776	0,0224	0,9776
LAME4	0,0224	0,9776	0,0224	0,9776
PRGA4	0,0321	0,9679	0,0321	0,9679
RPSA4	0,0282	0,9718	0,0282	0,9718

Percebe-se que, até a quarta casa decimal, não há diferença alguma entre as estimativas "ingênuas" das probabilidades de negociação e de não-negociação dos ativos daquelas do estado de equilíbrio obtidas por verossimilhança. Talvez tal resultado seja reflexo de estarmos trabalhando com dados de alta-freqüência (dados minuto a minuto), além dos ativos serem de baixa liquidez.

4. CONCLUSÃO

O presente artigo abordou uma das características tratadas no estudo de microestrutura de mercado, o mecanismo de negociação dos ativos. Mostrou-se que a não-negociação, quando não tratada da maneira adequada, gera autocorrelação espúria na série de taxas de retorno observadas, o que causa uma falsa idéia de previsibilidade. Ainda estendeu-se o modelo de não-negociação, incorporando-se uma cadeia de Markov de alcance 1 com 2 estados, de modo a tornar o modelo mais próximo de evidências teóricas encontradas na literatura.

Na aplicação dos resultados para séries de taxas de retornos de ativos brasileiros, viu-se que, para a amostra selecionada, não houve diferença entre as estimativas "ingênuas" e as probabilidades do estado de equilíbrio de negociação e não-negociação dos ativos. Pode-se ampliar este trabalho incorporando-se às seguintes alternativas: estimativa dos parâmetros por GMM e análise de dados de baixa freqüência (diários principalmente).

Uma conexão direta da analise efetuada pode ser feita em um estudo mais profundo de liquidez de ativos financeiros. As probabilidades de transição podem ajudar um gestor de recursos a adotar diferentes estratégias de investimento; ainda, podem oferecer uma medida menos subjetiva do *holding period* da carteira de investimentos, o que irá impactar no cálculo do VaR.

REFERÊNCIAS

ATCHISON, M.; SIMONDS, R. ***Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelation***. Journal of Finance, v.42, 111-118, 1987.

CAMPBELL, John; LO, A. W.; MACKINLAY, C. ***The Econometrics of Financial Markets***. New Jersey: Princeton University Press, 1997.

COHEN, K.; MAIER, S.; SCHWARTZ, R.; WHITECOMB, D. ***The Returns Generation Process, Returns Variance and the Effect of Thinness in Security Markets***. Journal of Finance, v.33, 149-167, 1978.

COHEN, K.; MAIER, S.; SCHWARTZ, R.; WHITECOMB, D. ***On the Existence of Serial Correlation in an Efficient Securities Market.*** TIMS Studies in the Management Sciences, v.11, 151-168, 1979.

COHEN, K.; HAWAWINI, G.; MAIER, S.; SCHWARTZ, R.; WHITECOMB, D. ***Friction in the Trading Process and the Estimation of Systematic Risk***. Journal of Financial Economics, v.12, 263-278, 1983.

DIMSON, E. ***Risk Measurement when Shares are subject to Infrequent Trading***. Journal of Financial Economics, v.7, 197-226, 1979.

FISHER, L. ***Some New Stock Market Indexes***. Journal of Business, v.39, 191-225, 1966.

LO, A.; MACKINLAY, A. C. ***Stock Market Prices do not follow Random Walks: Evidence from a simple Specification Test.*** Review of Financial Studies, v.1, 41-66, 1988.

LO, A.; MACKINLAY, A. C. ***An Econometric Analysis of Nonsychronous-Trading.*** Journal of Econometrics, v.45, 181-212, 1990a.

LO, A.; MACKINLAY, A. C. ***When Are Contrarian Profits Due To Stock Market Overreaction.*** Review of Financial Studies, v.3, 175-208, 1990b.

SCHOLES, M.; WILLIAMS, J. ***Estimating Betas from Nonsychronous Data.*** Journal of Financial Economics, v.5, 309-328, 1977.

A Apêndice 1: Demonstração dos resultados da proposição 1.
Para derivar os resultados (2.7) – (2.10) são necessários os momentos e co-momentos das variáveis de Bernoulli $X_{it}(k)$. De (2.3) segue que

$$E\left[X_{it}(k)\right] = (1-\pi_i)\pi_i^k \tag{A.1}$$

$$E\left[X_{it}^{\;2}(k)\right] = (1-\pi_i)\pi_i^k \tag{A.2}$$

Para *i*, *t e k* arbitrários. Para computar $E\left[X_{it}(k)X_{it+n}(l)\right]$ sabemos, por (2.3), que:

$$X_{it}(k)X_{it+n}(l) = \left(1-\delta_{it}\right)\delta_{it-1}...\delta_{it-k}(1-\delta_{it+n})\delta_{it+n-1}...\delta_{it+n-l} \tag{A.3}$$

Se $l \geq n$ então $E\left[X_{it}(k)X_{it+n}(l)\right] = 0$ com probabilidade 1, pois teremos δ_{it} e $\left(1-\delta_{it}\right)$ inclusos no produto dado pela expressão (A.3). Se $l < n$, então $E\left[X_{it}(k)X_{it+n}(l)\right] = \left(1-\pi_i\right)^2 \pi_i^{k+l}$. Logo:

$$E\left[X_{it}(k)X_{it+n}(l)\right] = \begin{cases} \{\left(1-\pi_i\right)^2 \pi_i^{k+l} & \text{para } l < n \\ 0 & \text{para } l \geq n \end{cases} \tag{A.4}$$

Da expressão (2.4) e (2.1), temos que:

$$\begin{aligned} E\left[r_{it}^{\;0}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[X_{it}(k) r_{it-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[X_{it}(k)\right] E\left[r_{it-k}\right] \\ &= \mu_i \sum_{k=0}^{\infty} \left(1-\pi_i\right)\pi_i^k \\ &= \mu_i \end{aligned} \tag{A.5}$$

Sendo que a expressão (A.5) segue da independência de $X_{it}(k)$ e r_{it-k}. Assim está deduzido o resultado obtido em (2.7).
Para obtermos a expressão (2.8), precisamos primeiro obter a expressão do segundo momento não-centrado de $r_{it}^{\;0}$:

$$\begin{aligned} E\left[\left(r_{it}^{\;0}\right)^2\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} X_{it}(k) r_{it-k} \sum_{l=0}^{\infty} X_{it}(l) r_{it-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[X_{it}^{\;2}(k) r_{it-k}^{\;2}\right] + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} E\left[X_{it}(k)X_{it}(l)\right] E\left[r_{it-k} r_{it-l}\right] \\ &= \mu_i^2 + \sigma_i^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} \left(1-\pi_i\right)\pi_i^l \left[\mu_i^2 + \sigma_i^2 \theta(k-l)\right],\ \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases} \\ &= \mu_i^2 + \sigma_i^2 + 2\left(1-\pi_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\pi_i^{k+1}\sum_{l=0}^{\infty}\mu_i^2 \pi_i^l\right) \\ &= \mu_i^2 + \sigma_i^2 + 2\mu_i^2 \frac{\pi_i}{1-\pi_i} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Sendo que $\sigma_i^2 = V\left[r_{it}^{\;0}\right]$. Isto resulta em (2.8), pois

$$\begin{aligned} V\left[r_{it}^{0}\right] &= E\left[r_{it}^{0}\right]-\left(E\left[r_{it}^{0}\right]\right)^{2} \\ &= \mu_i^2+\sigma_i^2+2\mu_i^2\frac{\pi_i}{1-\pi_i}-\mu_i^2 \\ &= \sigma_i^2+\frac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^2 \end{aligned} \qquad (A.7)$$

A autocovariância de r_{it}^{0} pode ser obtida similarmente calculando-se:

$$\begin{aligned} E\left[r_{it}^{0}r_{it+n}^{0}\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty}X_{it}(k)r_{it-k}\sum_{l=0}^{\infty}X_{it+n}(l)r_{it+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}E\left[X_{it}(k)X_{it+n}(l)r_{it-k}r_{it+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\left(1-\pi_i\right)^2\pi_i^{k+l}E\left[r_{it-k}r_{it+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\left(1-\pi_i\right)^2\pi_i^{k+l}\mu_i^2 \\ &= \mu_i^2\left(1-\pi_i^{n}\right) \end{aligned} \qquad (A.8)$$

Note que o limite superior do somatório em l da expressão (A.8) é finito em decorrência em (A.4). A expressão obtida em (A.8) segue do fato de que $\{r_{it}\}$ é uma seqüência IID e as únicas combinações de índices k e l que aparecem em (A.8) são aquelas em que r_{it-k} e r_{it+n-l} não são contemporâneos. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} Cov\left[r_{it}^{0}r_{it+n}^{0}\right] &= E\left[r_{it}^{0}r_{it+n}^{0}\right]-E\left[r_{it}^{0}\right]E\left[r_{it+n}^{0}\right] \\ &= \mu_i^2\left(1-\pi_i^{n}\right)-\mu_i^2 \\ &= -\mu_i^2\pi_i^{n} \end{aligned} \qquad (A.9)$$

O cálculo da autocovariância cruzada entre r_{it} e r_{jt+n} difere apenas em que os fatores comuns induzem à uma correlação cruzada contemporânea entre os retornos virtuais dos ativos i e j. Usando o fato que:

$$E\left[r_{it-k}r_{jt+n-l}\right]=\mu_i\mu_j+\beta_i\beta_j\sigma_f^{\,2}\theta\left(l-k-n\right)$$

Temos

$$\begin{aligned} E\left[r_{it}^{0}r_{jt+n}^{0}\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty}X_{it}(k)r_{it-k}\sum_{l=0}^{\infty}X_{jt+n}(l)r_{jt+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}E\left[X_{it}(k)X_{jt+n}(l)r_{it-k}r_{jt+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}E\left[X_{it}(k)\right]E\left[X_{jt+n}(l)\right]E\left[r_{it-k}r_{jt+n-l}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-\pi_i\right)\pi_i^{k}\left(1-\pi_j\right)\pi_j^{l}\left[\mu_i\mu_j+\beta_i\beta_j\sigma_f^{\,2}\theta\left(l-k-n\right)\right] \\ &= \mu_i\mu_j+\frac{\left(1-\pi_i\right)\left(1-\pi_j\right)}{1-\pi_i\pi_j}\beta_i\beta_j\sigma_f^{\,2}\pi_i^{n} \end{aligned} \qquad (A.10)$$

sendo que a expressão (A.10) foi obtida pela independência cruzada do processo de não-negociação. Assim, para completarmos o resultado obtido em (2.9) basta fazermos:

$$\begin{aligned} Cov\left[r_{it}^0 r_{jt+n}^0\right] &= E\left[r_{it}^0 r_{jt+n}^0\right] - E\left[r_{it}^0\right] E\left[r_{jt+n}^0\right] \\ &= \mu_i \mu_j + \frac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j} \beta_i \beta_j \sigma_f^{\,2} \pi_i^{\,n} - \mu_i \mu_j \\ &= \frac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j} \beta_i \beta_j \sigma_f^{\,2} \pi_i^{\,n} \end{aligned}$$

Finalmente, pelos resultados anteriores obtidos e pela definição de $Corr\left[r_{it}^0, r_{it+n}^0\right]$ temos:

$$Corr\left[r_{it}^0, r_{it+n}^0\right] = -\frac{\mu_i^2 \pi_i^n}{\sigma_i^2 + \dfrac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^{\,2}}$$

Correspondendo a expressão (2.10), complementando a demonstração.

B Apêndice 2: Demonstração dos resultados da proposição 2

Sejam P_{it} e Q_{it} as probabilidades não-condicionais de $\delta_{it} = 0$ e $\delta_{it} = 1$, respectivamente. Ainda, sejam P_i e Q_i as probabilidades do estado de equilíbrio. Então, pela expressão (2.11) obtemos:

$$P_{it} = \pi_i P_{it-1} + (1-\pi_i') Q_{it-1} \qquad \text{(A.11)}$$

$$Q_{it} = (1-\pi_i) P_{it-1} + \pi_i' Q_{it-1} \qquad \text{(A.12)}$$

No *steady-state*, $P_i = P_{it} = P_{i,t-1}$ e $Q_i = Q_{it} = Q_{i,t-1}$. Substituindo nas expressões anteriores, obtemos:

$$P_i = \frac{1-\pi_i'}{2-(\pi_i+\pi_i')} \qquad \text{(A.13)}$$

$$Q_i = \frac{1-\pi_i}{2-(\pi_i+\pi_i')} \qquad \text{(A.14)}$$

Portanto, a média, a variância e a autocorrelação de primeira ordem de δ_{it} no estado de equilíbrio, não-condicionadas, são dadas por:

$$E[\delta_{it}] = Q_i \qquad \text{(A.15)}$$

$$V[\delta_{it}] = E\left[\delta_{it}^2\right] - \left(E[\delta_{it}]\right)^2 = Q_i(1-Q_i) \qquad \text{(A.16)}$$

$$Corr[\delta_{it}, \delta_{it-1}] = E[\delta_{it}\delta_{it-1}] - E[\delta_{it}]E[\delta_{it-1}] = Q_i(\pi_i' - Q_i) \qquad \text{(A.17)}$$

Para calcular as estatísticas dos retornos observados, utilizaremos a expressão (2.4) . Temos:

$$\begin{aligned} E\left[r_{it}^0\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_{it}(k)] E[r_{it-k}] \\ &= \mu_i \left[\pi_i' Q_i + \sum_{k=1}^{\infty} P_i \pi_i^{\,k-1}(1-\pi_i)\right] = \mu_i (\pi_i' Q_i + P_i) \end{aligned} \qquad \text{(A.18)}$$

$$V\left[r_{it}^{0}\right]=E\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}X_{it}(k)r_{it-k}\right)^{2}\right]-\left(E\left[r_{it}^{0}\right]\right)^{2}$$
$$=\mu_i^2\left[\frac{P_i}{\pi_i\left(1-\pi_i\right)}+\pi_i'Q_i-\left(\pi_i'Q_i+P_i\right)^2\right] \quad \text{(A.19)}$$

Portanto, a $Corr\left[r_{it}^{0},r_{it-1}^{0}\right]$ será igual a:

$$Corr\left[r_{it}^{0},r_{it-1}^{0}\right]=\mu_i^2\left[\pi_i'-\left(\pi'Q_i+P_i\right)^2\right] \quad \text{(A.20)}$$