

## Modelos de Difusão com Salto para a Taxa de Juros de Curto Prazo no Brasil

**José Carlos Nogueira Cavalcante Filho**<sup>†</sup>  
*Universidade de Cornell*

**Edson Daniel Lopes Gonçalves**<sup>Ω</sup>  
*EBAPE / FGV*

### RESUMO

A fim de captar o efeito informacional da taxa de juros brasileira de curto prazo (taxa SELIC) por saltos de Poisson, nos baseamos nos testes realizados por Das (2002) e Johannes (2004), que mostram a importância de tais estruturas para os anúncios do Comitê Federal Americano de Mercado aberto (*U.S. Federal Open Market Committee - FOMC*). Como nas pesquisas mencionadas, encontramos evidências de que uma quantidade relevante da volatilidade de curto prazo no mercado de renda fixa é capturada através da introdução de saltos sobre o processo estocástico da taxa de curto prazo. Essa estrutura também permite a verificação do conteúdo de informação de eventos específicos, tais como reuniões do Comitê de Política Monetária brasileira (COPOM) e leilões de títulos públicos.

**Palavras-chave:** Processo estocástico. Difusões. Taxa SELIC. Saltos de Poisson. Renda fixa.

JEL códigos de classificação: C13, C22, G14.

Recebido em 27/06/2013; revisado em 18/12/2013; aceito em 16/01/2014; divulgado em 05/02/2015

\* **Autor para correspondência:**

<sup>†</sup> Mestre em Atuária Pelo IAPUC da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Vínculo: Assistente de ensino na SC Johnson Graduate School of Management da Universidade de Cornell

ENDEREÇO: 114 East Avenue - Ithaca / NY / EUA

E-mail: [jn457@cornell.edu](mailto:jn457@cornell.edu)

Telefone: (+1) 607-379-1609

<sup>Ω</sup> Doutor em Economia Pela EPGE / FGV

Vínculo: Professor da EPGE / FGV, da EBAPE / FGV e Pesquisador Sênior do CERI / FGV  
ENDEREÇO: Centro de Regulação e Infraestrutura - FGV, Praia de Botafogo, Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-mail: [edson.goncalves@fgv.br](mailto:edson.goncalves@fgv.br)

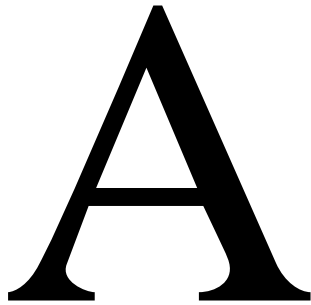
Telefone: (21) 3799-6 246

**Nota do Editor:** Esse artigo foi aceito por Emerson Mainardes



Este trabalho foi licenciado com uma Licença [Creative Commons - Atribuição 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/).

## 1 INTRODUÇÃO



modelagem e estimativa do efeito informacional em instrumentos financeiros são temas bem explorados na literatura, devido a tanto ao papel interpretativo quanto aos benefícios potenciais nas estruturas desses instrumentos de precificação. Vários estudos realizados nas décadas de 1970 e 1980 (FRENCH; ROLL, 1986; MERTON, 1976; PEARCE; ROLEY, 1985; SCHWERT, 1981) forneceram evidências empíricas do efeito da notícia econômica informacional. Apesar da importância deste efeito, no entanto, os autores acima mencionados não foram capazes de incorporá-lo em estruturas de preços de ativos. Outra característica comum nos estudos citados é o uso de pesquisas como fontes de informação para as expectativas do mercado (PARKER, 2007). Estudos mais recentes, no entanto, usam a extração de expectativas implícitas em instrumentos financeiros como fonte de informação, o que gera resultados mais realistas e tratáveis.

Andersen et al. (2003), utilizando dados de alta frequência da taxa de câmbio do dólar contra várias moedas estrangeiras (libra, iene, franco suíço e euro) para modelar surpresas econômicas, concluiu que tais surpresas<sup>1</sup> produzem saltos condicionais que caracterizam a velocidade média da trajetória do ajustamento. Outro achado interessante do estudo acima é que o mercado reage de forma assimétrica; especificamente, a notícia negativa tem um impacto maior do que notícias positivas.

Balduzzi et al. (2001) também indicaram que os anúncios macroeconômicos ter impactos significativos sobre as taxas de instrumentos financeiros. Usando dados intradiários do mercado de títulos dos EUA para investigar o efeito informacional dos anúncios, os autores concluíram que 17 tipos de anúncios tem impacto nos preços dos títulos. Os efeitos dos anúncios variam muito, dependendo da maturidade do título, mas, em geral, geram um aumento substancial da volatilidade dos preços *ex-post* aos anúncios.

Apesar da enorme quantidade de informação disponível e da velocidade com que se propagam nos mercados, os choques informativos imprevistos ocorrem regularmente. Tais eventos tendem a afetar as taxas de desconto e, portanto, os preços e os *spreads* de negociação de títulos de renda fixa. Parte da teoria macroeconômica moderna baseia-se na aplicação de

---

<sup>1</sup> Surpresa é a diferença entre o ex-ante e ex-post das expectativas do mercado relativas a um anúncio econômico.

choques inesperados como um instrumento de política monetária para maximizar seu efeito e minimizar a política de realização de custo. Muitos modelos de estrutura a termos existentes implicam que as taxas de juros se movem continuamente, seguindo processos de difusão. Estudos recentes mostram forte evidência empírica de que as taxas contem mudanças inesperadas e descontínuas de grande magnitude.

Um fluxo crescente de literatura incorpora explicitamente saltos nos modelos da dinâmica da taxa. Johannes (2004) desenvolveu testes para saltos nas taxas e encontrou fortes evidências de sua presença em T-Bills de três meses. Farnsworth e Bass (2003) efetuaram o modelo da taxa dos fundos federais como um processo com saltos e concluíram que esta estrutura explica a maioria dos movimentos da curva de juros. Lund et al. (2004) também encontraram fortes evidências de que saltos são importantes para garantir a qualidade do ajuste do modelo, especialmente no ajustamento de outliers na taxa de juros de curto prazo.

Há fortes evidências de um componente intenso e de vida curta da volatilidade das taxas de juros nos mercados emergentes. Através dos experimentos realizados por Edwards e Susmel (2003), é evidente que os estados de alta volatilidade da taxa de juros de curto prazo são relativamente comuns, especialmente depois de 1994, para os países da amostra selecionada. Como afirmado pelos autores, há três explicações possíveis para estas ocorrências em mercados emergentes: a mobilidade "excessiva" de capital, os regimes de taxa de câmbio flutuante, e os efeitos de contágio. Particularmente, no caso brasileiro, esses estados foram encontrados para durar cerca de uma semana, o que defende a existência de um comportamento típico do salto na taxa de juros de curto prazo.

O principal objetivo deste trabalho é capturar o efeito informacional da taxa de juros de curto prazo do Brasil (taxa SELIC), utilizando saltos de Poisson. Para este fim, nos baseamos nos testes conduzidos por Johannes (2004) e Das (2002), que mostram a importância das estruturas dos saltos de Poisson para anúncios do Comitê Federal de Mercado Aberto dos Estados Unidos. Como nos artigos acima mencionados, encontramos evidências de que grande parte da volatilidade de curto prazo nos mercados de renda fixa é capturada através da introdução de saltos no processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo. Além disso, nossos resultados indicam a superioridade da combinação do processo Ornstein-Uhlenbeck com saltos e variância ARCH (1) no que diz respeito aos outros modelos estimados. Nós apresentamos duas aplicações dos modelos com capacidade de salto em eventos específicos de mercado: o efeito dia-da-semana (leilões de títulos do governo) e os dias de reunião do

comitê de política monetária brasileira (COPOM). Em ambos os casos, há uma maior probabilidade de saltos na taxa SELIC em torno destas respectivas datas.

## 2 MÉTODOS E DADOS

Modelagem de taxas de juros com processos estocásticos tende a ser mais complexa do que empreendimentos semelhantes em ações ou instrumentos cambiais. Este aumento da complexidade é o resultado do comportamento de reversão à média encontrada nas taxas de juros, o que provavelmente é causada por uma reação exagerada dos agentes.

O comportamento de reversão à média também faz com que a função de probabilidade do processo dependente do tempo da ocorrência de reversão e intensidade. Outro fator complicador é a existência de algumas soluções fechadas para equações diferenciais estocástica de difusões com saltos e reversão à média.

O processo estocástico básico adotado neste trabalho é a difusão com reversão à média e saltos, seguindo a forma funcional proposta por Das (2002):

$$dr = k(\theta - r)dt + v dW + J d\pi(h) \quad (1)$$

Onde  $\theta$  é o parâmetro de tendência de longo prazo para a taxa  $r$ , que reverte sua média com a taxa  $k$ .

Por isso, a taxa de juros evolui de acordo com um processo Ornstein-Uhlenbeck de reversão à média e um processo de Poisson, que gera o salto aleatório  $J$ . O coeficiente de variação é  $v^2$ , e a frequência de saltos é gerada pelo parâmetro  $h$  (número de saltos por período). A intensidade de saltos pode ser constante ou gerada a partir de uma distribuição de probabilidades. A difusão e processo de Poisson são independentes tanto uns aos outros e de  $J$ .

O processo descrito pela equação (1), apesar de não ser o único processo estimado neste estudo, ele abriga os outros, uma vez que aqueles são casos particulares de a estrutura proposta. Uma difusão simples, por exemplo, ocorre quando o parâmetro é  $h$  nulo. Outras possibilidades são modelos com o componente de variância Gaussiano como ARCH (1), tal como descrito pela seguinte equação: <sup>2</sup>

$$v(t_2 + \Delta t)^2 = b_0 + b_1 \cdot \{r(t_2) - E[r(t_2)|r(t_1)]\}^2 \quad (2)$$

A partir desta estrutura, desdobramos dois modelos: um de difusão simples descrito pela forma funcional de base proposto por Das (2002) e um combinado com o ARCH (1) para a

<sup>2</sup> Onde  $t_2 > t_1$  e  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

variância. Neste sentido, quatro modelos básicos são objetos de estudo e de comparação, a principalmente:

- Processo Ornstein-Uhlenbeck;
- Processo Ornstein-Uhlenbeck com variância ARCH (1);
- Processo Ornstein-Uhlenbeck com saltos; e
- Processo Ornstein-Uhlenbeck com saltos e variância ARCH (1).

A estimativa das difusões com saltos é complicada por vários motivos. O primeiro e mais óbvio é a existência de amostras discretas de dados, enquanto que o modelo é formulado em tempo contínuo. Isto conduz, em geral, à utilização de aproximações discretas de processos estocásticos, tais como a aproximação de Euler ou de Bernoulli, como em Ball e Torous (1983) - tais aproximações resultam em modelos mal especificados.

Entre os vários métodos de estimativa de difusões de salto (por exemplo, o Método Generalizado de Momentos e métodos baseados em Monte Carlo via Cadeias de Markov), nós adotamos a Estimativa de Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood Estimation* - MLE). A escolha para MLE foi baseada na possibilidade de utilizar a função característica ao invés da função de distribuição, sem perda de qualidade nos resultados.<sup>3</sup> Na literatura, existem várias soluções analíticas para a função característica dos processos estocásticos, em comparação com apenas algumas soluções que resultam na expressão da função de densidade.

## 2.1 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Para estimar o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos com uma distinta amostra observada, usamos uma aproximação discreta. De acordo com Chan (2005), existem duas alternativas principais para realizar esta estimativa: distribuições mistas Poisson-Gaussianas e Gaussianas - Gaussianas.

As limitações decorrentes da truncagem da distribuição de Poisson, indicado por Vlaar e Palm (1993), justificam a escolha do Gaussiano - Gaussiano com uma estrutura de aproximação de Bernoulli. Esta abordagem segue a estrutura inicialmente proposta por Ball e Torous (1983), também usada por Vlaar e Palm (1993) e Das (2002).

Pela aproximação de Bernoulli, de acordo com a Ball e Torous (1983), presume-se que, em cada instante de tempo um salto nas taxas de juros pode ou não ocorrer, o que é razoável

---

<sup>3</sup> Garantida pela relação bidirecional entre a distribuição e funções características.

em intervalos de tempo pequenos. No primeiro dia, por exemplo, pode-se esperar não haver saltos ou, no máximo um salto.

Este pressuposto em relação à aproximação de Bernoulli, o que é detalhado em Ball e Torous (1983) e Das (2002), leva a uma função de probabilidade que pode ser escrita como se segue:

$$L = \prod_{t=1}^T f[r(t + \Delta t)|r(t)] \quad (3)$$

Uma vez que a função de probabilidade para os processos estocásticos é definida, a estimativa de parâmetros pode ser obtida através da maximização da mesma. Honore (1998) sugere que a função de verossimilhança para processos de difusões de saltos pode ter várias singularidades.<sup>4</sup> Esta descoberta indica a baixa confiabilidade das estimativas a respeito das difusões de saltos feitas utilizando o método de máxima verossimilhança. De acordo com Honore (1998), vários estudos seminais, como Jorion (1988) e Ball e Torous (1983), realizar estimativa de probabilidade máxima, sem preocupação com esses problemas.

Para resolver o problema singularidades, Honore (1998) propõe uma restrição no espaço de otimização: as variâncias da mistura Gaussiana devem ser consideradas proporcionais entre si. Se tivermos uma mistura de  $N_1(\mu_1, \sigma_1)$  e  $N_2(\mu_2, \sigma_2)$  tais como:

$$L = w \cdot f_{N_1(\mu_1, \sigma_1)} + (1 - w) \cdot f_{N_2(\mu_2, \sigma_2)} \quad (4)$$

A solução proposta em Honore (1998) é impor que  $\sigma_1^2 = \alpha \cdot \sigma_2^2$ , com  $\alpha$  sendo uma constante com finito diferente de zero. Esta restrição impede a ocorrência de singularidades geradas por  $\sigma_1 = 0$  e  $\sigma_2 \neq 0$  (ou vice-versa). Além disso, quando esta condição for satisfeita, é possível obter estimativas consistentes e assintoticamente normais.

Para a forma funcional particular da mistura Gaussiana, sendo  $q$  o parâmetro de peso, as variações são  $\sigma_1^2 = v^2 \Delta t + \gamma^2$  e  $\sigma_2^2 = v^2 \Delta t$ . Portanto, uma das variâncias pode ser escrita como uma função da outra, ou  $\sigma_1^2 = (1 + \gamma^2 / \sigma_2^2) \cdot \sigma_2^2$ . Para satisfazer a solução proposta por Honore (1998), é suficiente que  $(1 + \gamma^2 / \sigma_2^2)$  não seja nula (sempre satisfeitos desde que  $\gamma^2 \geq 0$  and  $\sigma_2^2 \geq 0$ ) e finita.<sup>5</sup>

Para a estimativa, foram empregados os algoritmos de otimização de Berndt-Hall-Hall-Hausman, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno e Simplex. Para o procedimento, foi realizada

<sup>4</sup> Por exemplo, quando uma das variações na mistura Gaussiana tende a zero e a outra não.not.

<sup>5</sup> Satisfeita tautologicamente pelas definições da função de verossimilhança.

uma estimativa de duas etapas: a primeira, sem restrições sobre os parâmetros, usando o algoritmo de Simplex para a calibração dos valores iniciais da segunda estimativa; o segundo com restrições adequadas no espaço de otimização, utilizando condições iniciais como os valores encontrados na etapa anterior.

Uma particularidade do software de otimização usado<sup>6</sup> sobre o algoritmo Simplex é que ele não foi capaz de determinar o desvio padrão das estimativas. Desvio padrão dos parâmetros só foi obtido na segunda etapa de avaliação.

A fim de comparar os modelos, usamos de critérios de informação de Akaike e Schwarz. Segundo Ramezani e Zeng (2007), a principal vantagem na utilização de critérios de informação contra os testes de probabilidade é a possibilidade de comparação simultânea de vários modelos (versus a comparação em pares dos testes de verossimilhança).

## 2.2 DADOS

O conjunto de dados utilizado neste trabalho é a taxa brasileira de juros de curto prazo (taxa SELIC), coletados a partir da base de dados do Banco Central do Brasil (2010). A amostra contém 2.512 observações diárias da taxa entre 24/01/2000 e 22/01/2010.

Durante este período, a taxa SELIC anualizada variou de 26,35% no início de 2003 até 8,64% no final de 2009. A trajetória é apresentada na Figura I abaixo, com destaque para os pontos de descontinuidade<sup>7</sup> da taxa.

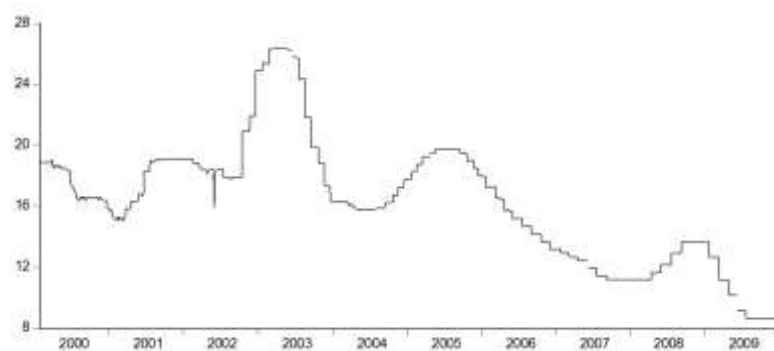


Figura 1: Taxa SELIC Anualizada

A variação da taxa SELIC<sup>8</sup> é apresentada a seguir, na Figura II.

<sup>6</sup> Estima RATS™

<sup>7</sup> Mais proeminente em 2003 e 2009, o que poderia sugerir ocorrências de salto.

<sup>8</sup> Aqui definida como a primeira diferença da variável ( $SELIC_{t+1} - SELIC_t$ ).

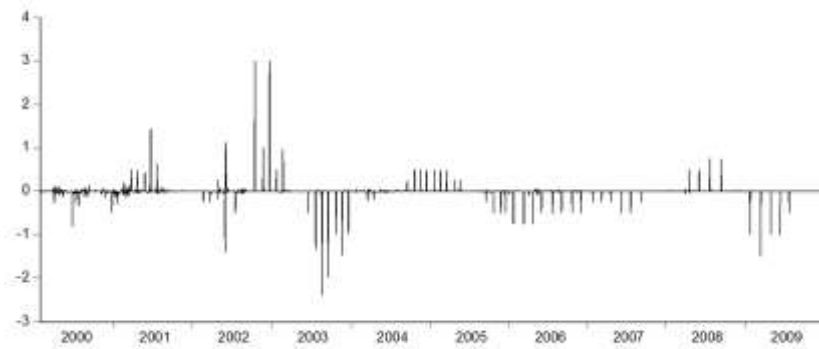


Figura 2: Variação da Taxa SELIC

Como mostrado na figura acima, 2002 e 2003 mostram as maiores oscilações do que outros anos analisados, provavelmente como resultado da incerteza sobre a política monetária que ocorreu durante o período eleitoral.

As principais estatísticas descritivas para a SELIC e sua primeira diferença são mostradas na Tabela 1.

**Tabela 1 - Selic e 1ª Diferença Estatística Descritiva**

	<b>SELIC</b>	<b>SELIC 1ª Diferença</b>
<b>Média</b>	16,1963	-0,0041
<b>Mediano</b>	16,3400	0,0000
<b>Máximo</b>	26,3500	3,0000
<b>Mínimo</b>	8,6400	-2,3800
<b>Desvio Padrão</b>	4,1284	0,1542
<b>Assimetria</b>	0,3087	2,4218
<b>Curtose</b>	3,0409	172,3494
<b>Observações</b>	2,512	2,511

O excesso de curtose na primeira diferença da SELIC, de acordo com Das (2002) sugere a utilização de modelos com capacidade de salto. Além disso, em Becker (1991), o fracasso de modelos Gaussianos puros para explicar a taxa de juros de curto prazo é evidente.

Os resultados para o teste de Jarque-Bera, cuja hipótese nula é a normalidade em que os dados são apresentados na Tabela 2 abaixo.

**Tabela 2 - Teste de Normalidade Jarque-Bera**

	<b>SELIC</b>	<b>SELIC 1ª Diferença</b>
<b>Estatísticas de teste</b>	40,0717	300301
<b>P-valor</b>	0,0000	0,0000

Assim, fica claro que os altos valores de estatísticas de teste e p-valor nulo (em nove casas decimais para a taxa Selic e sua primeira diferença) levam à rejeição da hipótese nula, tanto para a taxa e sua variação.



Também foi realizado o teste de Dickey-Fuller com intercepto, cuja hipótese nula é de raiz unitária. Analisando os resultados, apresentados na Tabela 3. Através do teste de Dickey-Fuller aumentado, não foi possível rejeitar a hipótese nula para a taxa SELIC. Por outro lado, nós não rejeitamos a hipótese nula de raiz unitária para a variação da taxa SELIC.

Tabela 3 - Teste de Dickey-Fuller

	SELIC	SELIC <sup>1ª</sup> Diferença
<b>Estatísticas de teste</b>	-0,6932	-8,1549
<b>P-valor</b>	0,8465	0,0000

### 3 RESULTADOS

Em primeiro lugar, nós otimizamos a função de verossimilhança para o processo Ornstein-Uhlenbeck, sem restrições sobre os parâmetros. A partir dos resultados, que são apresentados na Tabela 4. Nos resultados de otimização sem restrições, pode-se observar alguma inconsistência, como o valor estimado do longo prazo para a taxa média ( $\theta$ ) é negativo. Este resultado parece indicar que a taxa SELIC tende para um valor negativo a longo prazo, o que não faz sentido, já que a taxa SELIC é uma taxa de juros nominal. Restrições relevantes são, então, que a média de longo prazo do processo ( $\theta$ ), assim como a taxa de reversão para este significativo ( $k$ ) são não-negativo.

Tabela 4 - Resultados de Otimização sem Restrições

Estimativa / Modelo	<i>O-U</i>	<i>O-U ARCH (1)</i>	<i>O-U c / saltos</i>	<i>OU c / saltos e ARCH (1)</i>
$k$	0,029039	-0,470999	0,008491	-0,000001
$\theta$	-0,191356	0,086037	0,065500	0,064645
$b_0$	-	0,000000	-	0,000000
$b_1$	-	25424,115759	-	75,238683
$q$	-	-	0,163000	0,192436
$\mu$	-	-	-0,000230	0,000804
$v^2$	0,000599	-	0,000001	-

$\gamma^2$	-	-	0,000015	0,000017
Log-verossimilhança	12.690,69	13.320,32	18.969,51	31.847,59

A partir das restrições identificadas<sup>9</sup>, foi realizado outro ciclo de otimização, os resultados dos quais podem ser visto na Tabela 5 abaixo.

**Tabela 5 - Estimativas de Otimização Restritas (Desvio Padrão em Parênteses)**

Estimativa / Modelo	<i>O-U</i>	<i>O-U ARCH (1)</i>	<i>O-U com / saltos</i>	<i>OU c / saltos e ARCH (1)</i>
$k$	-0,000001 (0,000000)	0,000000 (0,000000)	0,008497 (0,006464)	0,005113 (0,004815)
$\theta$	0,167200 (0,019300)	0,056922 (0,035567)	0,065700 (0,078200)	0,019268 (0,129831)
$b_0$	- -	0,000481 (0,000014)	- -	0,000000 (0,000000)
$b_1$	- -	856,299130 (152,924483)	- -	210,722922 (10,446016)
$q$	- -	- -	0,163000 (0,007452)	0,074213 (0,005882)
$\mu$	- -	- -	-0,000230 (0,000192)	-0,000548 (0,000427)
$v^2$	0,000599 (0,000017)	- -	0,000001 (0,000000)	- -
$\gamma^2$	- -	- -	0,000015 (0,000001)	0,000030 (0,000001)
<b>Log-verossimilhança</b>	12.689,80	12.767,85	18.969,51	19.299,52
<b>AIC</b> <sup>10</sup>	-10,11	-10,17	-15,13	-15,40
<b>BIC</b> <sup>11</sup>	-10,10	-10,17	-15,11	-15,38

Da mesma forma, os resultados de uma primeira tentativa para efetuar a otimização sem restrições para o processo Ornstein-Uhlenbeck com variação de ARCO (1) pode ser visto na Tabela 4. Estes resultados também mostram inconsistências, com o parâmetro  $k$  violando a restrição não-negativa<sup>12</sup> e  $b_1$  atingindo números exorbitantes. Realizando a otimização com as restrições discutidas anteriormente, foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 5 .

Os resultados para a determinação dos parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos, ambos com e sem a volatilidade de ARCO (1), são mostrados na Tabela 4 (sem restrições) e Tabela 5 (restrita).

<sup>9</sup> As restrições de otimização de ativos foram  $\theta \geq 0$  e  $k \geq 0$ .

<sup>10</sup> Critério de Informação de Akaike.

<sup>11</sup> Critério de Informação Bayesiano.

<sup>12</sup> De acordo com a definição do processo Ornstein-Uhlenbeck.

Como pode ser visto nas tabelas de resultados, os critérios de informação adotados indicam a clara vantagem do processo de saltos, tanto puro e com volatilidade estocástica. Outra questão importante é que a introdução de saltos gera uma diminuição no parâmetro de variância ( $v^2$ ), indicando que saltos são grande parte da volatilidade da taxa SELIC.

No processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos, o parâmetro que representa a probabilidade de haver um salto ( $q$ ) foi estimado em 16,3%. Isto indica que, em média, um salto ocorre cada seis dias (ou ligeiramente mais do que um salto por semana). Na nossa estimativa do processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos com volatilidade ARCH (1), o valor deste parâmetro foi reduzido, indicando que parte da variância taxa é absorvida pela volatilidade estocástica em detrimento dos saltos.

Em Das (2002), para uma amostra de a taxa dos *fed funds* entre 1988 e 1997, o resultado estimado para a probabilidade de salto ( $q$ ) com um quadro semelhante é maior (21,6%) do que o estimado no presente estudo, o que é consistente com o sistema de metas de inflação e política monetária da última década no Brasil.

Também é interessante notar o resultado do parâmetro de tendência de longo prazo da taxa de juros ( $\theta$ ). O valor do parâmetro foi consistentemente menor em Das (2002) do que no caso brasileiro. Isso mostra que, apesar de ter menos movimentos bruscos na taxa de curto prazo, a taxa básica no Brasil, de acordo com o risco soberano dos países emergentes, tende a operar com valores mais elevados do que em mercados consolidados.

Isso não é novidade para os agentes dos mercados financeiros, especialmente aqueles que lidam com títulos de renda fixa, que certas datas, muitas vezes têm uma maior volatilidade. O fim de um mês, por exemplo, tende a concentrar maior volume de transações. Este efeito é geralmente relacionado a esforços adicionais dos bancos para atender ou exceder os seus objetivos. Datas de lançamento de indicadores de atividade econômica normalmente exibem maior volatilidade pelas razões discutidas nas seções anteriores.

Na seção seguinte, desenvolvemos duas extensões para o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos - o efeito do dia da semana e o efeito das reuniões do Comitê de Política Monetária (COPOM) - tentando capturar o efeito informacional da taxa SELIC, seguindo a estrutura descrita em Das (2002), por meio de mudanças na probabilidade de salto.

### 3.1 EFEITO DO DIA DA SEMANA

Como em outros mercados, como o de ações e opções, mercados de renda fixa, especialmente o mercado de títulos do governo, tendem a apresentar maior volatilidade em determinados dias da semana. O Tesouro Nacional, por exemplo, recompra títulos antes de seu vencimento, em quartas-feiras, o aumentando a quantidade de negócios e, portanto, a volatilidade observada neste dia da semana. Além disso, os leilões de títulos emitidos pelo governo geralmente ocorrem em determinados dias da semana - LTN, LFT e NTN-F nas quintas-feiras e NTN-B nas terças e quartas-feiras.<sup>13</sup>

A fim de verificar se a probabilidade de salto na taxa SELIC é dependente do dia da semana, utilizou-se uma estrutura similar à encontrada em Das (2002), com a probabilidade dos parâmetros de saltos conforme a estrutura abaixo:

$$q = q_0 + q_1 \cdot d_1 + q_2 \cdot d_2 + q_3 \cdot d_3 + q_4 \cdot d_4 \quad (5)$$

Onde  $q_0$  representa a probabilidade de um salto nas sextas-feiras e as variáveis  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_4$  representam a probabilidade incremental de um salto em, respectivamente, segundas, terças, quartas e quintas-feiras, (contra sextas-feiras). As variáveis  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  são *dummies* que assumem o valor 1 quando o dia é de, respectivamente, segunda, terça, quarta e quinta-feira.

As estimativas foram realizadas por máxima verossimilhança, semelhantes às discutidas nas seções anteriores. Os resultados para o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos são mostrados na Tabela 6 que segue:

**Tabela 6 - Estimativas de Efeito do Dia de Semana (Desvio Padrão entre Parênteses)**

Estimativa / Modelo	OU c / saltos	OU c / saltos e ARCH (1)
$k$	0,008487 (0,006302)	0,005181 (0,005081)
$\theta$	0,065200 (0,075800)	0,017024 (0,135650)
$v^2$	0,000001 (0,000000)	- -
$b_0$	- -	0,000000 (0,000000)
$b_1$	- -	215,880175 (13,722084)
$q_0$	0,147200 (0,017500)	0,045201 (0,010961)

<sup>13</sup> LTN e NTN-F são títulos fixos de tesouraria, semelhante ao T-Bills e T-Bonds, respectivamente; LFT é indexada à taxa SELIC e NTN-B é um tipo de título protegido contra a inflação, semelhante ao TIPs do Tesouro americano.

$q_1$	-0,018600 (0,023400)	0,001827 (0,014020)
$q_2$	-0,016100 (0,022900)	-0,014200 (0,013791)
$q_3$	0,023100 (0,024600)	0,036552 (0,017170)
$q_4$	0,086600 (0,025700)	0,113573 (0,020120)
$\mu$	-0,000232 (0,000196)	-0,000547 (0,000302)
$\gamma^2$	0,000015 (0,000001)	0,000030 (0,000003)
<b>Log-verossimilhança</b>	18.960,01	19.299,73
<b>AIC</b>	-15,14	-15,42
<b>BIC</b>	-15,12	-15,39

Analisando os resultados, torna-se evidente que os dias com maior probabilidade de saltos são quintas-feiras, quartas-feiras e sextas-feiras. Como mencionado anteriormente, os leilões dos três tipos de títulos do governo (particularmente Letras Financeiras do Tesouro - LFT, cuja rentabilidade está diretamente ligada à taxa SELIC) tendem a concentrar-se nas quintas-feiras.

Outros determinantes potenciais de maior probabilidade de ocorrência salto às quartas-feiras e quintas-feiras são, respectivamente, as reuniões do Comitê de Política Monetária (cujos resultados são anunciados geralmente às quartas-feiras) e da divulgação das atas dessas reuniões (que geralmente ocorrem nas quintas-feiras após a reunião). Tais argumentos fortalecem o relacionamento entre os choques informativos e as ocorrências de salto na taxa SELIC.

Os resultados da estimativa efetuada durante o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos com variância ARCH (1), que seguiu procedimentos semelhantes aos discutidos acima, são mostrados na Tabela 6, o que torna ainda mais claro o fato de que há probabilidade mais elevada de salto ocorre nas quintas-feiras.

### 3.2 EFEITO DAS REUNIÕES DO COMITÊ DE POLÍTICA MONETÁRIA (COPOM)

Como discutido acima, as reuniões do Comitê de Política Monetária (COPOM) provavelmente são um dos fatores que causam o aumento da probabilidade de saltos na taxa de juros SELIC às quintas-feiras. A forma funcional seguinte, semelhante à de Das (2002) para a probabilidade de saltos, tenta capturar este efeito:

$$q = q_0 + q_1 \cdot d_{COPOM} \quad (6)$$

Onde  $q_0$  representa o *status quo* para a probabilidade de ocorrência de salto,  $q_1$  representa a probabilidade incremental da ocorrência de salto em dias de reunião do COPOM, e  $d_{COPOM}$  é uma variável *dummy* que assume valor de 1 para as datas reunião do COPOM.

Semelhante às seções anteriores, a estimativa de parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos foi realizada por máxima verossimilhança; os resultados são apresentados na Tabela 7 abaixo.

**Tabela 7 - Estimativas das Reuniões da do COPOM (Desvio Padrão entre Parênteses)**

<b>Estimativa / Modelo</b>	<i>OU c / saltos</i>	<i>OU c / saltos e ARCH (1)</i>
$k$	0,008517 (0,006484)	0,000000 (0,000000)
$\theta$	0,066600 (0,076600)	0,246281 (0,038743)
$v^2$	0,000001 (0,000000)	- -
$b_0$	- -	0,000000 (0,000000)
$b_1$	- -	206,634967 (14,337213)
$q_0$	0,158600 (0,008121)	0,070817 (0,006014)
$q_1$	0,097700 (0,046400)	0,096621 (0,045047)
$\mu$	-0,000232 (0,000196)	-0,000550 (0,000376)
$\gamma^2$	0,000015 (0,000001)	0,000029 (0,000003)
<b>Log-verossimilhança</b>	18.968,48	19.293,27
<b>AIC</b>	-15,13	-15,40
<b>BIC</b>	-15,12	-15,38

Estes resultados mostram que, em um dia típico, a probabilidade de um salto na taxa SELIC está em torno de 16%. Este valor, no entanto, aumenta em 9 pontos percentuais, se a data é um dia de reunião do COPOM.

Pode-se argumentar, portanto, que em dias de reuniões do COPOM há um 60% maior probabilidade de ocorrência de um salto na taxa SELIC do que em dias sem reuniões do COPOM. Estes resultados mostram-se bastante semelhantes aos encontrados por Das (2002) e Johannes (2004), mostrando uma forte relação entre os anúncios do COPOM e o salto na taxa

de juros de curto prazo. Com modelagem semelhante, Margueron (2006) demonstrou a relação entre as reuniões do COPOM e mudanças na volatilidade da taxa SELIC.

Da mesma forma, por máxima verossimilhança, obtivemos as estimativas dos parâmetros para o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos com variância de ARCH (1), cujos resultados são apresentados na Tabela 7.

Mais uma vez, os resultados mostram que a probabilidade de um salto aumenta em datas reunião do COPOM. Além disso, dada a captura parcial da volatilidade da taxa pela estrutura de volatilidade estocástica, a probabilidade de saltos em dias de reunião do COPOM (16%) é mais do que o dobro da probabilidade em outros dias (7%). Assim, os resultados do estudo do efeito do dia da semana demonstram que as reuniões do COPOM são uma variável muito influente sobre a probabilidade de salto da taxa SELIC.

#### **4 CONCLUSÃO**

Este trabalho investigou os efeitos da incorporação de saltos de Poisson em processos estocásticos para modelar a taxa de juros de curto prazo no Brasil. A relevância da introdução de saltos na modelagem da taxa de juros de curto prazo dos EUA foi discutida nas obras de Johannes (2004) e Das (2002), mas trabalhos neste campo em relação ao Brasil e outros países emergentes ainda são escassos.

Além da estrutura tradicional processo Ornstein-Uhlenbeck, também foram estimados modelos reforçados com saltos e volatilidade estocástica de ARCH (1). As estimativas destes modelos foram realizadas utilizando máxima verossimilhança, e os algoritmos computados convergiram rapidamente para resultados bastante razoáveis. De acordo com os critérios de informação de Akaike e Schwarz, o processo Ornstein-Uhlenbeck com saltos e variância ARCH (1) mostrou-se superior aos outros modelos estimados.

Em seguida, foram realizadas duas aplicações específicas dos modelos com salto, examinando o efeito do dia da semana e o efeito de reuniões do COPOM. As estimativas foram feitas de forma análoga aos da primeira fase, com a hipótese de que estes efeitos iria aumentar a probabilidade de saltos.

Obtivemos resultados robustos, mostrando que há maior probabilidade de salto às quartas-feiras e quintas-feiras, provavelmente devido às intervenções do Tesouro Nacional, como leilões de títulos públicos, que ocorrem sistematicamente nesses dias. Os dias de reunião da autoridade monetária brasileira também foram mostrados como tendo maior probabilidade de salto, caracterizando-as como informacionalmente relevante.

Vale a pena mencionar que, embora a presença de saltos em datas "especiais" é um fenômeno amplamente conhecido no mercado financeiro brasileiro, havia pouca ou nenhuma evidência científica para tal. Além disso, operadores do mercado agora podem contar com ou se basear sobre nossos experimentos como uma alternativa sólida para modelos de difusão simples na simulação de trajetórias futuras do processo estocástico da taxa de juros.

Como possíveis extensões para futuras pesquisas, sugerimos o seguinte: experiências com outras estruturas, não só Poisson-Gaussianas; estudo da relação entre a incorporação de saltos na taxa de curto prazo e os movimentos em maiores maturidades; e, finalmente, a análise dos efeitos da incorporação de saltos na precificação de instrumentos financeiros, de acordo com a sugestão da realização de cenários de teste de estresse usando saltos nas taxas de juros do *Financial Accounting Standards Board* dos Estados Unidos.

## REFERÊNCIAS

ANDERSEN, T. G. et al. Micro effects of macro announcements: real-time price discovery in foreign exchange. **American Economic Review**, v. 93, n. 1, p. 38-62, 2003.

BALDUZZI, P.; ELTON, E. J.; GREEN, T. C. Economic news and bond prices: evidence from the U.S. treasury market. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 36, n. 4, p. 523-543, 2001.

BALL, C. A.; TOROUS, W. N. A simplified jump process for common stock returns. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 18, n. 1, p. 53-65, 1983.

BECKER, D. N. Statistical tests of the lognormal distribution as a basis for interest rate. *transactions of society of actuaries*, v. 43, 1991.

BCB. Brazilian Central Bank. **Taxa selic retrieved**. 2010. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/?SELICDIA>>.

Chan, K. F. Modelling conditional heteroscedasticity and jumps in Australian short-term interest rates. **Accounting and Finance**, v. 45, p. 537-551, 2005.

DAS, S. R. The surprise element: jumps in interest rates. **Journal of Econometrics**, v. 106, n. 1, p. 27-65, 2002.

EDWARDS, S.; SUSMEL, R. **Interest rate volatility in emerging countries**. **Review of Economics and Statistics**, 2003.

FARNSWORTH, H.; BASS, R. The term structure with semi-credible targeting. **Journal of Finance**, v. 58, n. 2, p. 839-866, 2003.

FRENCH, K.; ROLL, R. Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders. **Journal of Financial Economics**, v. 17, n. 1, p. 5-26, 1986.



HONORE, P. Pitfalls in estimating jump-diffusion models. **SSRN eLibrary**, 1998.

JOHANNES, M. The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. **Journal of Finance**, v. 59, n. 1, p. 227-260, 2004.

JORION, P. On jump processes in the foreign exchange and stock markets. **Review of Financial Studies**, v. 1, n. 4, p. 427-445, 1988.

LUND, J.; ANDERSEN, T. G.; BENZONI, L. Stochastic volatility, mean drift, and jumps in the short rate diffusion: sources of steepness, level and curvature. **Econometric Society, North American Winter Meetings**, v. 432, 2004.

MARGUERON, F. L. **Previsão de volatilidade para os vértices da estrutura a termo de taxa de juros em reais brasileira**. EPGE/FGV. 2006. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10438/340>>.

MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of Financial Economics**, v. 3, n. 1-2, p. 125-144, 1976.

PARKER, J. The Impact Of Economic News On Financial Markets. **Munich Personal RePEc Archive**, 2007.

PEARCE, D. K.; ROLEY, V. V. Stock prices and economic news. **Journal of Business**, v. 58, n. 1, p. 49-67, 1985.

RAMEZANI, C.; ZENG, Y. Maximum likelihood estimation of the double exponential jump-diffusion process. **Annals of Finance**, v. 3, n. 4, p. 487-507, 2007.

Schwert, G. W. The Adjustment of Stock Prices to Information about Inflation. **Journal of Finance**, v. 36, n. 1, p. 15-29, 1981.

VLAAR, P.; PALM, F. The message in weekly exchange rates in the european monetary system: mean reversion, conditional heteroscedasticity, and jumps. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 11, n. 3, p. 351-360, 1993.

## APÊNDICE

### DEFINIÇÕES

#### PROCESSO ORNSTEIN–UHLENBECK

Um processo é chamado de Ornstein-Uhlenbeck se cumprir a seguinte equação estocástica diferencial:

$$dX = k(\theta - X)dt + v dW \quad (7)$$

Onde  $W$  é um movimento browniano padrão,  $\theta$  é a tendência de longo prazo ( $\theta \geq 0$ ),  $k$  representa a taxa de reversão para esta tendência ( $k \geq 0$ ) e  $v$  é a volatilidade.

**ALGORITMOS COMPUTACIONAIS****ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS**

```
calendar 2000 1 252
```

```
allocate 2512
```

```
open data selic1.prn
```

```
data(org=obs) / rf
```

```
set dr = (rf-rf{1})/100
```

```
set r = rf{1}/100
```

```
* ***** ORNSTEIN-UHLENBECK *****
```

```
nonlin(parmset=base) k theta v2
```

```
nonlin(parmset=constraint) k>=0.0 theta>=0.0
```

```
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
```

```
frml archvar = v2
```

```
frml func = (exp(-((resid)**2)/ $
```

```
(2*archvar/252)))/(2*%pi*archvar/252)**0.5
```

```
frml logl = log(func)
```

```
compute k=0.88, theta=0.16, v2 = 0.002
```

```
nlpar(subiterations=10000)
```

```
maximize(method=bfgs,iterations=1000, parmset=base+constraint) logl 3 *
```

```
* ***** ORNSTEIN-UHLENBECK VOL ARCH(1) *****
```

```
nonlin(parmset=base) k theta b0 b1
```

```
nonlin(parmset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
```

```
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
```

```
frml archvar = b0+b1*resid(T-1)**2
```

```
frml func = (exp(-((resid)**2)/ $
```

```
(2*archvar/252)))/(2*%pi*archvar/252)**0.5
```

```
frml logl = log(func)
```

```
compute k=0.88, theta=0.2, b0=0.002, b1=222.88
```

```
nlpar(subiterations=10000)
```

```
maximize(method=bfgs,iterations=1000,paramset=base+constraint) logl 4 *
```

```
* ***** ORNSTEIN–UHLENBECK COM SALTOS *****
```

```
nonlin(paramset=base) k theta v2 q0 mu gamma2
```

```
nonlin(paramset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
```

```
frml q = q0
```

```
frml archvar = v2
```

```
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
```

```
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/
```

$$(2*(archvar/252+gamma2)))/(2*\%pi*archvar/252+gamma2)**0.5 +$$

$$(1-q)*(exp(-((resid)**2)/$$

$$(2*archvar/252)))/(2*\%pi*archvar/252)**0.5$$

```
frml logl = log(func)
```

```
compute k=0.88, theta=0.16, mu=0.0003, gamma2=0.00003, q0=0.2185, v2=0.0004
```

```
nlpar(subiterations=10000)
```

```
maximize(method=bfgs,iterations=1000,paramset=base+constraint) logl 6 *
```

```
* **ORNSTEIN–UHLENBECK COM SALTOS E ARCH(1) **
```

```
nonlin(paramset=base) k theta b0 b1 q0 mu gamma2
```

```
nonlin(paramset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
```

```
frml q = q0
```

```
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
```

```
frml archvar = b0+b1*resid(T-1)**2
```

```
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/
```

$$(2*(archvar/252+gamma2)))/(2*\%pi*archvar/252+gamma2)**0.5 +$$

$$(1-q)*(exp(-((resid)**2)/$$

$$(2*archvar/252)))/(2*\%pi*archvar/252)**0.5$$

```
frml logl = log(func)
```

```
compute k=0.88, theta=0.16, $
```

```
mu=0.0016, gamma2=0.00002, q0=0.1241, b0=0.0002, b1=127.04
```

```
nlpar(subiterations = 10000)
```

```
maximize(method=bhhh,iterations=1000,paramset=base+constraint) logl 7 *
```

## EFEITO DO DIA DA SEMANA

```
calendar 2000 1 252
```

```
allocate 2512
```

```
open data selicdds.prn
```

```
data(org=obs) / rf seg ter qua qui
```

```
set dr = (rf-rf{1})/100
```

```
set r = rf{1}/100
```

```
* ***** ORNSTEIN-UHLENBECK COM SALTOS *****
```

```
nonlin(paramset=base) k theta v2 q0 q1 q2 q3 q4 mu gamma2
```

```
nonlin(paramset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
```

```
frml q = q0+q1*seg+q2*ter+q3*qua+q4*qui
```

```
frml archvar = v2
```

```
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
```

```
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/
```

```
(2*(archvar/252+gamma2))))/(2*pi*archvar/252+gamma2)**0.5 + $
```

```
(1-q)*(exp(-((resid)**2)/
```

```
(2*archvar/252)))/(2*pi*archvar/252)**0.5
```

```
frml logl = log(func)
```

```
compute k=0.88, theta=0.16, mu=0.0003, gamma2=0.00003, q0=0.2, q1=0.0, q2=0.0, q3=0.0,
```

```
q4=0.0, v2=0.0004
```

```

nlpar(subiterations=10000)

maximize(method=bfgs,iterations=1000,paramset=base+constraint) logl 10 *

* **ORNSTEIN-UHLENBECK COM SALTOS E ARCH(1) ** *

nonlin(paramset=base) k theta b0 b1 q0 q1 q2 q3 q4 mu gamma2
nonlin(paramset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0

frml q = q0+q1*seg+q2*ter+q3*qua+q4*qui
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
frml archvar = b0+b1*resid(T-1)**2
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/
    (2*(archvar/252+gamma2))))/(2*%pi*archvar/252+gamma2)**0.5 + $
    (1-q)*(exp(-((resid)**2)/
    (2*archvar/252)))/(2*%pi*archvar/252)**0.5
frml logl = log(func)

compute k=0.88, theta=0.16, $
    mu=0.0016, gamma2=0.00002, q0=0.08, q1=-0.002, q2=0.03, q3=-0.03, q4=0.07,
b0=0.0002, b1=127.04

nlpar(subiterations = 10000)

```

```

maximize(method=bfgs,iterations=1000,paramset=base+constraint) logl 11 *

```

### **EFEITO DAS REUNIÕES DO COPOM**

```

calendar 2000 1 252
allocate 2512
open data selicdcopom.prn
data(org=obs) / rf cop
set dr = (rf-rf{1})/100
set r = rf{1}/100

```

```

* ***** ORNSTEIN-UHLENBECK COM SALTOS ***** *
nonlin(parmset=base) k theta v2 q0 q1 mu gamma2
nonlin(parmset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
frml q = q0+q1*cop
frml archvar = v2
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/ $
              (2*(archvar/252+gamma2))))/(2*%pi*archvar/252+gamma2)**0.5 + $
              (1-q)*(exp(-((resid)**2)/ $
              (2*archvar/252)))/(2*%pi*archvar/252)**0.5
frml logl = log(func)
compute k=0.88, theta=0.005, mu=0.00003, gamma2=0.0003, q0=0.1, q1=0.0, v2=0.00004
nlpar(subiterations=10000)
maximize(method=bfgs,iterations=1000,parmset=base+constraint) logl 7 *
* **ORNSTEIN-UHLENBECK COM SALTOS E ARCH(1) ** *
nonlin(parmset=base) k theta b0 b1 q0 q1 mu gamma2
nonlin(parmset=constraint) theta>=0.0 k>=0.0
frml q = q0+q1*cop
frml resid = dr-k*(theta-r)/252
frml archvar = b0+b1*resid(T-1)**2
frml func = q*(exp(-((resid-mu)**2)/ $
              (2*(archvar/252+gamma2))))/(2*%pi*archvar/252+gamma2)**0.5 + $
              (1-q)*(exp(-((resid)**2)/ $
              (2*archvar/252)))/(2*%pi*archvar/252)**0.5
frml logl = log(func)
compute k=0.0005, theta=0.1, $
              mu=0.0001, gamma2=0.00001, q0=0.05, q1=0.05, b0=0.00002, b1=100.7
nlpar(subiterations = 10000)
maximize(method=bfgs,iterations=1000,parmset=base+constraint) logl 8 *

```