

## Indexação de Carteiras de Renda Fixa ao IMA-B

**Emilio Ricardo Carvalhais<sup>†</sup>**  
*Banco do Brasil*

**Antônio Marcos Duarte Júnior<sup>Ω</sup>**  
*Faculdades Ibmecc*

### RESUMO

Este estudo considera o problema da indexação de carteiras de renda fixa ao Índice de Mercado ANBIMA – Série B (IMA-B) utilizando Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B). Propõe-se um modelo matemático que minimiza os desvios dos retornos da carteira escolhida em relação aos retornos da carteira teórica do índice. O modelo resultante é um problema de programação matemática com função objetivo convexa, restrições lineares e variáveis inteiras, livres e não negativas. Cinco exemplos numéricos com dados reais são apresentados para ilustrar a utilização prática do modelo. Os resultados obtidos para os ajustes são analisados em conjunto com os dados de fundos indexados ao IMA-B existentes no mercado financeiro brasileiro. A metodologia proposta resultou em ajustes com ótimo controle dos erros de acompanhamento da carteira indexada.

**Palavras-chave:** IMA-B. Gestão passiva. Indexação. NTN-B. Renda fixa.

Recebido em 31/03/2014; revisado em 03/09/2014; aceito em 10/11/2014; divulgado em 04/05/2015

#### \*Autor para correspondência:

<sup>†</sup>. Mestre pelas Faculdades Ibmecc/RJ  
Vínculo: Gerente de Divisão, Banco do Brasil Gestão de Recursos DTVM S/A.  
Endereço: Praça XV de novembro, Rio de Janeiro – RJ - Brasil  
E-mail: [ecarvalhais@bb.com.br](mailto:ecarvalhais@bb.com.br)  
Telefone: (21) 3808-7531.

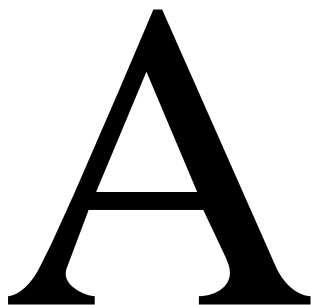
<sup>Ω</sup> Ph.D., Matemática Aplicada, Princeton University, EUA.  
Vínculo: Professor nas Faculdades Ibmecc/RJ e UERJ.  
Endereço: Avenida Presidente Wilson, Rio de Janeiro – RJ - Brasil  
E-mail: [antoniomarcosdj@uerj.br](mailto:antoniomarcosdj@uerj.br)  
Telefone: (21)4503400.

**Nota do Editor:** Esse artigo foi aceito por Emerson Mainardes



## 1 INTRODUÇÃO

Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (ANBIMA) estruturou uma família de índices para que fossem utilizados como carteiras de referência (*benchmarks*) pelos investidores do mercado brasileiro de renda fixa (ANBIMA, 2010a).



O principal índice de renda fixa proposto pela ANBIMA é o Índice de Mercado ANBIMA – Geral (IMA-Geral), que pode ser decomposto em quatro outros índices:

1. IMA-B, lançado no ano 2005, e composto pelas Notas do Tesouro Nacional Série B (NTN-B) indexadas ao IPCA.
2. IMA-C, lançado no ano 2005, e composto pelas Notas do Tesouro Nacional Série C (NTN-C) indexadas ao IGP-M.
3. IRF-M, lançado no ano 2000, e composto pelas Letras do Tesouro Nacional (LTN) e Notas do Tesouro Nacional Série F (NTN-F), representando títulos pré-fixados.
4. IMA-S, lançado no ano 2005, e composto pelas Letras Financeiras do Tesouro (LFT), representando títulos indexados à taxa SELIC.

De acordo com ANDIMA (2009), a participação do IMA-B no IMA-Geral era de 3% em 2005, tendo esse percentual subido para 25% no primeiro semestre de 2010 (ANBIMA, 2010b), e atingido 32% ao final de 2013 (ANBIMA, 2014).

Em 2009, o total de fundos de investimento que utilizavam o IMA-Geral ou algum de seus componentes como carteira de referência somava trinta e cinco (SAMUEL, 2009). A expectativa era de crescimento acelerado na adoção dos índices IMA como índices de referência como alternativa às taxas dos Certificados de Depósito Interbancário, especialmente no caso dos fundos de pensão e seguradoras devido às características de longo prazo de seus passivos. Um ano depois, em 2010, o número de fundos de investimentos que utilizavam o IMA-Geral ou algum de seus componentes como carteira de referência havia subido para noventa e três, sendo que, destes, quarenta e nove adotavam especificamente o IMA-B (ANBIMA, 2010b). Ao final de 2013, o número de fundos com o IMA-B como índice de referência havia saltado para cento e quarenta e três, com um patrimônio gerido total de quase R\$ 40 bilhões (ANBIMA, 2014).

Mudanças recentes no ambiente normativo previdenciário também ilustram a maior importância dos índices IMA:

1. A Resolução CMN 3456/2007 permitiu a utilização dos índices IMA como parâmetros de cobrança de taxa de desempenho.
2. A Resolução CMN 3790/2009 e, posteriormente, a Resolução CMN 3922/2012 permitiram que aplicações de renda fixa pudessem ter como “parâmetro de rentabilidade um dos índices IMA, ou a composição de mais de um deles”.

O IMA-B é composto pelas NTN-B, que são papéis corrigidos pelo IPCA adicionado de taxa de juros de 6% a.a., mais ágio/deságio, definido no momento da negociação. Do total da dívida pública federal ao final de 2009, 25% das emissões estavam atreladas ao IPCA (ou seja, NTN-B) de acordo a Secretaria do Tesouro Nacional (BRASIL, 2009), tendo este percentual superado 30% ao final de 2013 (BRASIL, 2013).

Silva, Carvalho e Garrido (2009) apontam o aumento da participação dos fundos de pensão no mercado de NTN-B na última década diante da necessidade dessas entidades por títulos de longo prazo. Segundo Carvalho e Morais (2009), os principais compradores de NTN-B são os investidores do mercado de previdência e seguradoras, que buscam casar seus ativos e passivos. Como consequência do interesse nas NTN-B, surgiu naturalmente a demanda no mercado financeiro por fundos de investimentos que adotassem o IMA-B como sua carteira de referência.

O tema de estudo deste artigo está diretamente relacionado à melhor forma de gerir carteiras de investimento (CREMERS; PETAJISTO, 2009; FABOZZI; MARKOWITZ, 2011; FAMA; FRENCH, 2010; FERRI, 2007; PETAJISTO, 2011): gestão ativa ou gestão passiva? Enquanto na gestão ativa de carteiras o responsável responde ativamente às mudanças nas expectativas no mercado de forma a obter retornos ajustados a riscos superiores aos dos concorrentes e/ou carteiras de referência, na gestão passiva o responsável não responde às mudanças nas expectativas no mercado (LARSEN; RESNICK, 1998; MAGGIN; TUTTLE; PINTO; MCLEAVEY, 2007; VOLPERT, 2000).

A indexação é uma forma de gestão passiva definida como a estruturação de carteiras com o propósito de obter retorno igual ao de alguma carteira de referência (BUCKLEY; KORN, 1998; COLEMAN; LI; HENNIGER; 2006; FRINO; GALLAGHER, 2001; FUSCO; MCLEAVEY; PINTO; RUNKLE, 2007; GUASTAROBA; SPERANZA, 2012; JANSEN; VAN DIJK, 2002). A indexação de carteiras surgiu no mercado acionário norte-americano na década de 70 (CFA INSTITUTE, 2009) e, no Brasil, foi utilizada para a oferta do primeiro fundo no mercado acionário na década de 90 (DUARTE, 1997).

O interesse crescente na indexação pode ser ilustrado com três dados:

1. Reilly e Kao (1992) mostrou que a evolução do mercado de fundos indexados nos EUA saltou de US\$ 3 bilhões em 1984 para mais de US\$ 80 bilhões em 1991, em apenas sete anos.
2. Nove anos depois, em 2010, o total de ativos investidos em fundos indexados já atingia US\$ 1 trilhão, sendo 20% deste total em fundos indexados em renda fixa, com os clientes institucionais (principalmente fundos de pensão e seguradoras) figurando entre os maiores interessados (INVESTMENT COMPANY INSTITUTE, 2011).
3. Ao final de 2012, os ativos líquidos investidos em fundos indexados nos Estados Unidos haviam ultrapassado US\$ 1,3 trilhão. (INVESTMENT COMPANY INSTITUTE, 2013).

O nosso objetivo neste artigo é propor uma metodologia que permita aos gestores atuando no mercado de renda fixa brasileiro a indexação de suas carteiras ao IMA-B utilizando como ativos somente as NTN-B. Embora já existam artigos descrevendo a indexação de carteiras a índices do mercado acionário nacional (CALDEIRA; PORTUGAL, 2010; DUARTE, 1997; SANFINS; DUARTE, 2014; SANT'ANNA; FILOMENA; BORENSTEIN, 2014), não foi encontrada qualquer publicação que proponha uma metodologia para a indexação de carteiras a algum índice de renda fixa brasileiro.

A proposta desta pesquisa facilita o processo de gestão de fundos atrelados ao IMA-B ao permitir a melhor gestão do risco de mercado relativo presente na estruturação e gestão de carteiras indexadas, minimizando custos operacionais (corretagem, emolumentos etc.), controlando desvios em relação ao índice de referência (ou seja, IMA-B) e reduzindo o dispêndio de tempo na estruturação e execução de carteiras indexadas de renda fixa. Trata-se, portanto, de um resultado com aplicação prática imediata na crescente indústria de fundos do Brasil.

A metodologia proposta está calcada em um modelo de programação matemática (CORNUEJOLS; TUTUNCU, 2007) que permite ao gestor minimizar qualquer função de perda. Essas funções de perdas estão baseadas na Duração de Macaulay (DM), permitindo ao gestor controlar o quanto a duração (FABOZZI, 1999) de sua carteira indexada pode desviar da duração da carteira teórica de composição do IMA-B segundo diferentes cenários de mercado. Foram realizadas, neste trabalho, simulações com quatro funções de perdas para fins de ilustração numérica. O modelo resultante é um problema de programação matemática com

função objetivo convexa, restrições lineares, e variáveis inteiras, livres e não negativas (TAHA, 2008).

Muito embora o interesse específico deste trabalho esteja na indexação ao IMA-B, em grande parte, a metodologia apresentada pode ser adaptada para a indexação de carteiras de renda fixa ao IMA-C, devendo o gestor utilizar as NTN-C para esse fim, ou ao IRF-M, devendo o gestor utilizar as LTN e NTN-F no segundo caso.

É interessante lembrar que, no Brasil, já estão disponíveis para a indexação de carteiras os chamados Fundos de Índice (FI, *Exchange-Traded Funds*), mas somente para o mercado acionário (BLACKROCK, 2013; BM&FBOVESPA, 2013; BNDES, 2004). A utilização de FI para a indexação nos mercados internacionais é crescente e ilustrada em Alexander e Barbosa (2008), Amenc e Goltz (2009), Blitz, Huij e Swinkels (2012), Bruce (2009), Bruce e Fuhr (2012), Harper, Madura e Schnusenberg (2006), Kostovetsky (2003) e Rompotis (2009). Para o caso brasileiro, é ilustrada em Matos, Iquiapaza e Ferreira (2014) e Sanfins e Duarte (2014).

Embora a tendência nos mercados financeiros seja a indexação de carteiras com o uso de FI, no caso específico do mercado de renda fixa brasileiro, como não existem FI disponíveis, é necessária a utilização dos próprios ativos compondo o índice de interesse para a estruturação de carteiras indexadas até este momento. É muito importante mencionar que a metodologia apresentada neste artigo pode ser diretamente utilizada para a estruturação de FI atrelados ao IMA-B, sendo esta uma contribuição importante desta pesquisa.

Descreve-se, na próxima seção, a metodologia utilizada para a indexação de carteiras ao IMA-B utilizando somente as NTN-B, a partir da modelagem rigorosa do problema de programação matemática resultante. A terceira seção apresenta os resultados de cinco estudos simulados com dados reais do mercado financeiro brasileiro. A quarta seção conclui o trabalho e apresenta direções para trabalhos futuros no tema de indexação de carteiras de renda fixa no Brasil.

## **2 METODOLOGIA PARA INDEXAÇÃO AO IMA-B**

Propõe-se uma metodologia para a indexação ao IMA-B estruturada em cinco etapas:

1. Análise da Carteira Teórica do IMA-B
2. Seleção da Técnica para Gestão Passiva
3. Determinação da Carteira Indexada
4. Geração de Cenários para a Estrutura a Termo dos Cupons de IPCA
5. Estruturação da Carteira

No restante desta seção, descrevem-se as cinco etapas separadamente.

## 2.1 ANÁLISE DA CARTEIRA TEÓRICA DO IMA-B

O passo inicial para a indexação é o entendimento da composição da carteira teórica do IMA-B no momento desejado de indexação.

A carteira teórica do IMA-B pode ser visualizada diretamente no sítio da ANBIMA. A carteira é disponibilizada com três dias de antecedência para o próximo período de vigência (que se inicia sempre no primeiro dia útil após o dia 15 de cada mês). Os pesos dos vencimentos no IMA-B correspondem ao percentual do valor marcado a mercado de cada vencimento em relação ao valor total das NTN-B negociadas no mercado financeiro.

Como ilustração, a Tabela 1 apresenta a composição (percentual) da carteira teórica do IMA-B divulgada no dia 15/12/2010 para o período de 16/12/2010 até 17/01/2011. Existiam quinze NTN-B disponíveis para a indexação da carteira ao IMA-B. Por exemplo, a NTN-B com vencimento em 15/08/2014 respondia por 3,63% do total do valor a mercado dentre todas as NTN-B disponíveis para investimento, enquanto a NTN-B com vencimento em 05/08/2016 respondia por somente 0,26% do valor total. O nível do IMA-B no dia 15/12/2010 fechou em 2361,30.

A Tabela 1 apresenta também a DM e o *Value-at-Risk* (JORION, 2006) para todas as NTN-B compondo o IMA-B. Por exemplo, o vencimento 15/05/2040 apresentava no fechamento do mercado em 15/12/2010 a duração de aproximadamente 3699 dias úteis e o *Value-at-Risk* de -0,7342%.

**Tabela 1 - Carteira Teórica do IMA-B em 15/12/2010**

Vencimento	Peso	Duração de Macaulay (dias úteis)	Value-at-Risk (95%, 1 ano)
<b>15/05/2011</b>	10,10%	92,99	-0,0238%
<b>15/11/2011</b>	3,37%	216,34	-0,0639%
<b>15/08/2012</b>	9,61%	388,68	-0,1008%
<b>15/05/2013</b>	13,09%	559,99	-0,1486%
<b>15/08/2014</b>	3,63%	816,00	-0,2108%
<b>15/05/2015</b>	3,63%	977,89	-0,2663%
<b>15/08/2016</b>	0,26%	1198,23	-0,3172%

<b>15/05/2017</b>	8,13%	1348,73	-0,3308%
<b>15/08/2020</b>	5,19%	1844,08	-0,4500%
<b>15/08/2024</b>	7,63%	2367,99	-0,4288%
<b>15/08/2030</b>	1,01%	2976,75	-0,5332%
<b>15/05/2035</b>	7,26%	3410,37	-0,6924%
<b>15/08/2040</b>	1,34%	3699,11	-0,7342%
<b>15/05/2045</b>	13,58%	4041,30	-0,7510%
<b>15/08/2050</b>	3,12%	4149,10	-0,8234%
<b>IMA-B</b>		1675,55	-0,2889%

Fonte: Autores, com dados da ANBIMA.

Duas limitações de ordem prática não podem ser ignoradas pelo gestor quando da indexação de sua carteira ao IMA-B com as NTN-B:

1. O Tesouro Nacional não oferta todos os vencimentos de NTN-B simultaneamente em seus leilões (ou seja, no mercado primário). Assim, é necessário recorrer ao mercado secundário para a aquisição de ativos, em que os títulos são geralmente negociados em lotes de 10.000 unidades. Mais ainda, nem sempre todos os ativos estão disponíveis para negociação diariamente (pode não haver comprador, vendedor ou ambos para uma determinada NTN-B, em determinado dia), sendo os mais líquidos usualmente aqueles com menor maturidade. Por exemplo, ao final de 2010, a média diária de títulos negociados da NTN-B com vencimento em 15/05/2013 girava ao redor de 170.000, enquanto a mesma média diária para o vencimento em 15/05/2045 estava em somente 35.000. Quando da indexação de carteiras ao IMA-B, serão utilizadas apenas negociações em lotes (ou seja, em 10.000 unidades de compra ou venda), dado que os custos relacionados a lotes fracionários podem ser substancialmente maiores no mercado por questões de iliquidez.

2. Como o preço de uma NTN-B ao final de 2010 girava ao redor de R\$ 2.000,00, um lote representava aproximadamente um montante (compra ou venda) de R\$20 milhões. Assim, para comprar um lote de cada um dos quinze vencimentos no mercado secundário, seriam necessários aproximadamente R\$ 300 milhões. Portanto, a possibilidade de utilizar poucos vencimentos (ou seja, não utilizar todos os quinze vencimentos disponíveis) para a indexação necessita ser considerada para carteiras com pequenos montantes geridos. Naturalmente, para carteiras com montantes elevados (bilhões de reais) a possibilidade de compra de todas as NTN-B pode ser considerada. Para efeito de ilustração prática, entre os

fundos de investimento (ativos ou passivos) oferecidos no mercado financeiro brasileiro ao final de 2010 que adotavam o IMA-B como índice de referência, apenas sete superavam R\$ 1 bilhão em patrimônio segundo dados da Comissão de Valores Mobiliários. Na abordagem ao problema de indexação de carteiras ao IMA-B, apresentou-se um modelo que flexibiliza a determinação do número de vencimentos a serem utilizados, podendo tal valor ser bem menor que o total disponível. Em outras palavras, essa proposta permite ao gestor escolher livremente quantos vencimentos ele deseja utilizar para a indexação de sua carteira ao IMA-B.

## 2.2 SELEÇÃO DA TÉCNICA PARA GESTÃO PASSIVA

Segundo Fabozzi e Markowitz (2011) as duas possibilidades mais utilizadas para a gestão passiva de carteiras de renda fixa são:

1. Compra e Manutenção (*Buy-and-Hold*), quando o gestor compra ativos de renda fixa e os leva sempre até vencimento, reinvestindo todos os valores obtidos em novos ativos (de renda fixa) que também serão levados até vencimento.
2. Indexação, quando o gestor busca desempenho igual ao de uma carteira de referência escolhida (usualmente, um índice de mercado, como o IMA-B). Essa é a possibilidade que abordamos neste artigo.

No caso específico de indexação, as três técnicas mais utilizadas para a gestão da carteira passiva são (BARRO; CANESTRELLI, 2009; CANAKGOZ; BEASLEY, 2009; GAIVORONSKI; KRYLOV; VAN DER WIJST, 2005; KRINK; MITTNIK; PATERLINI, 2009; YAO; ZHANG; ZHOU, 2006):

1. Replicação Total, quando ocorre a compra completa da carteira de referência, título por título, na mesma proporção de sua composição teórica. Como ponto positivo, essa técnica apresenta erro de acompanhamento igual a zero em teoria, mas, na prática, apresenta custo operacional (emolumentos, corretagem, etc.) muito elevado, pois requer o contínuo balanceamento da carteira sempre que ocorrer uma alteração na composição da carteira de referência ou quando montantes são recebidos (por exemplo, juros semestrais pagos pelo emissor do título de renda fixa).
2. Amostragem, quando ocorre a compra de alguns títulos que compõem a carteira de referência, sendo que os montantes daqueles títulos que não foram comprados são redistribuídos proporcionalmente entre os títulos comprados. Essa técnica apresenta custo



operacional menor do que no caso anterior, mas não permite controle adequado dos erros de acompanhamento, os quais podem resultar elevados.

3. Minimização do Descasamento, quando é feita a minimização de uma função que mede desvios da carteira em estruturação em relação à carteira de referência escolhida. Nesse caso, é possível utilizar um número menor de ativos do que o total compondo a carteira de referência, reduzindo os custos operacionais, com melhor controle dos erros de acompanhamento por parte do gestor do que no caso da amostragem. Essa é a possibilidade coberta neste artigo, com a medida de controle de descasamento adotada baseada na DM. Em outras palavras, busca-se controlar o descasamento entre a carteira de referência (IMA-B) e a carteira indexada com a minimização das diferenças entre as durações das duas carteiras para os diferentes cenários gerados para a evolução da estrutura a termo dos cupons de IPCA. A seguir apresenta-se a formulação matemática do problema de otimização resultante.

### 2.3 DETERMINAÇÃO DA CARTEIRA INDEXADA

Considera-se o problema de indexação no qual existem  $n + 1$  ativos disponíveis para investimento:

1. Existem  $n$  vencimentos diferentes de NTN-B disponíveis para investimento. Em exemplos numéricos,  $n = 15$ , conforme a Tabela 1.
2. Uma operação compromissada está disponível (para fazer o papel de “caixa”), sendo esta denotada como o ativo  $n + 1$ .

Para as  $n$  NTN-B disponíveis, o montante investido em R\$, e denotado por  $X_j$ , é obtido de

$$X_j = p_j^h \times l_j \times N_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Em que:

1. O preço marcado a mercado (em R\$) da NTN-B  $j$  é denotado por  $p_j^h$ .
2. O lote negociado para a NTN-B  $j$  é denotado por  $l_j$ . Em exemplos numéricos, adota-se  $l_j = 10.000 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ .
3. O número de lotes comprados da NTN-B  $j$  é denotado por  $N_j$ , sendo que  $N_j \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ .

Pode-se observar da equação (1) que  $X_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ .

Assume-se que o montante total para investimento (em R\$) é igual a  $c$ , sendo necessária a introdução da restrição

$$c = \sum_{j=1}^{n+1} X_j \quad (2)$$

com  $X_{n+1}$  denotando o investimento em operações compromissadas.

Impõem-se duas restrições relacionadas à iliquidez dos  $n + 1$  ativos disponíveis para investimento:

1. Para minimizar problemas de iliquidez quando de futuros balanceamentos da carteira indexada impomos no modelo que

$$N_j \leq \gamma \times b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

em que  $b_j$  denota o número de lotes disponíveis para compra em todo o mercado de NTN-B e  $\gamma$  denota o percentual máximo do mercado que pode ser mantido em carteira pelo gestor. Por exemplo, no primeiro exemplo numérico utilizamos  $\gamma = 0,2\%$  para efeito de ilustração.

2. Também para evitar problemas de iliquidez quando de solicitações de resgates realizadas pelos investidores, impõe-se no modelo que

$$X_{n+1} \geq \alpha \times c \quad (4)$$

em que  $\alpha$  denota o percentual mínimo (do total investido) que deve ser mantido em “caixa” para cobrir rapidamente demandas de resgates dos clientes. Por exemplo, no primeiro exemplo numérico, utiliza-se  $\alpha = 1\%$  para efeito de ilustração.

Assume-se que sejam gerados  $m$  cenários (igualmente prováveis) para o cálculo dos retornos das  $n$  NTN-B disponíveis para investimento. Denota-se o preço (mercado a mercado) e a DM da NTN-B  $j$  segundo o cenário  $i$  por  $p_{ij}$  e  $d_{ij}$ , respectivamente, com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ . Para o caso da operação compromissada, a sua duração é de um dia (ou seja,  $d_{i, n+1} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ ).

Obtém-se a DM  $D_i$  da carteira indexada para cada cenário  $i$  com a equação

$$c \times D_i = 1 \times X_{n+1} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \times p_{ij} \times l_j \times N_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

A DM é sempre positiva, logo  $D_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Denota-se a DM da carteira teórica do índice IMA-B para o cenário  $i$  como  $d_i^I$ .

Neste trabalho, propõe-se minimizar o descasamento entre a DM da carteira de referência e da carteira indexada para o conjunto de  $m$  cenários gerados para análise. Como a sensibilidade dos preços de ativos de renda fixa é diretamente proporcional a sua duração no caso de pequenos movimentos paralelos da estrutura a termo, a minimização proposta permite controlar o erro de acompanhamento e, por conseguinte, controlar os riscos de mercado relativo de taxas de juros.

Os desvios entre a DM da carteira teórica do índice IMA-B e da carteira indexada são denotados por  $E_i$ , sendo definidos pela relação

$$E_i = d_i^l - D_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

Como não é possível garantir que os erros sejam sempre positivos ou negativos, tem-se que  $-\infty < E_i < +\infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Denota-se a função objetivo do problema como  $L(E_1, E_2, \dots, E_m)$ . Essa função será uma “função de perda” ou “função de erro”, e nosso objetivo será sempre o de minimizá-la. Neste artigo, utilizam-se quatro funções de perda para fins de ilustração numérica:

1. Média Aritmética dos Erros Absolutos (MAEA)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m |E_i| \quad (7)$$

2. Média Aritmética dos Erros Quadrados (MAEQ)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m E_i^2 \quad (8)$$

3. Máximo Erro Absoluto (MEA)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \text{máximo}\{|E_1|, |E_2|, \dots, |E_m|\} \quad (9)$$

4. Medida Mediana dos Erros Absolutos (MMEA)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \text{mediana}\{|E_1|, |E_2|, \dots, |E_m|\} \quad (10)$$

O modelo de otimização completo pode ser escrito de forma compacta como

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && L(E_1, E_2, \dots, E_m) \\
& \text{Sujeito a:} && E_i = d_i^l - D_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
& && c \times D_i = 1 \times X_{n+1} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \times p_{ij} \times l_j \times N_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
& && c = \sum_{j=1}^{n+1} X_j \\
& && X_j = p_j^h \times l_j \times N_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
& && N_j \leq \gamma \times b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
& && X_{n+1} \geq \alpha \times c \\
& && N_j \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
& && X_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n+1 \\
& && D_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
& && -\infty < E_i < +\infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, m
\end{aligned} \tag{11}$$

A partir de (11) que o modelo de programação matemática resultante apresenta:

1. O total de  $n$  variáveis inteiras.
2. O total de  $n + m + 1$  variáveis não negativas.
3. O total de  $m$  variáveis livres.
4. O total de  $n + 2m + 1$  restrições lineares de igualdade.
5. O total de  $n + 1$  restrições lineares de desigualdade.

#### 2.4 GERAÇÃO DE CENÁRIOS PARA A ESTRUTURA A TERMO DOS CUPONS DE IPCA

Uma etapa muito demandante do ponto de vista operacional quando do uso do modelo (11) para indexar carteiras está relacionado à geração dos  $m$  cenários para a estrutura a termo de cupons de IPCA.

Podemos pensar o processo de geração de cenários como composto por cinco passos:

1. Obtenção da estrutura a termo para os cupons de IPCA no fechamento do mercado do dia anterior.
2. Uma vez obtida a estrutura a termo para os cupons de IPCA (fechamento do dia anterior), o gestor pode marcar a mercado todas as NTN-B disponíveis para investimento e, dessa forma, obter os valores para os parâmetros  $p_j^h$  no modelo (11).
3. Agora, dada a estrutura a termo no fechamento do mercado no dia anterior, e dado o horizonte de balanceamento (por exemplo, diário, como no caso dos exemplos numéricos apresentados adiante), o gestor deve simular  $m$  possíveis realizações – ou seja, cenários - para a evolução da estrutura a termo para os cupons de IPCA nesse período de tempo.

4. A seguir, para cada estrutura a termo que tenha sido simulada, o gestor deve calcular o preço (marcado a mercado) e a DM para cada vencimento de NTN-B disponível para investimento. Dessa forma, o gestor terá gerado os valores para os parâmetros  $p_{ij}$  e  $d_{ij}$  do modelo (11).

5. Por fim, o gestor deve calcular a DM esperada para a carteira do IMA-B de acordo com cada cenário gerado e, desta forma, obter os valores para os parâmetros  $d_i^l$  do modelo (11).

Neste artigo, o processo de estimação e simulação das estruturas a termo para os cupons de IPCA, assim como marcação a mercado de todas as NTN-B, foi baseado na metodologia descrita em Banco do Brasil (2006, 2010). A metodologia utilizada pelo Banco do Brasil está baseada na metodologia da Simulação Histórica proposta para o cálculo do *Value-at-Risk* de carteiras de renda fixa (JORION, 2006).

## 2.5 ESTRUTURAÇÃO DA CARTEIRA

Uma vez obtidos todos os parâmetros necessários, o gestor pode resolver/otimizar o modelo (11) para uma função de perda  $L(E_1, E_2, \dots, E_m)$  de sua preferência.

Ao final, os valores ótimos obtidos para as variáveis  $N_1, N_2, \dots, N_n$  indicarão os montantes (em números de lotes) que devem ser adquiridos para a melhor indexação à carteira do IMA-B.

## 3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentam-se cinco estudos simulados para ilustrar o uso do modelo (11) com dados reais.

### 3.1 PRIMEIRO ESTUDO SIMULADO

Os seguintes parâmetros foram utilizados neste primeiro caso:

1. O total disponível para investimento foi fixado em R\$ 400 milhões (ou seja,  $c = 400000000$ ). A escolha desse montante foi baseada no valor da mediana dos patrimônios dos fundos indexados ao IMA-B listados pela CVM no fechamento de 2010. Esse montante será alterado no segundo estudo simulado.

2. O montante mínimo em caixa foi fixado em R\$ 4 milhões (ou seja,  $\alpha = 1\%$ ). Esse montante será alterado no terceiro estudo simulado.

3. O número máximo de lotes de qualquer vencimento das NTN-B foi fixado em 0,2% do montante total disponível no mercado por questões de liquidez (ou seja,  $\gamma = 0,2\%$ ). Esse montante será alterado no quarto estudo simulado.

A Tabela 2 resume as alocações nas carteiras indexadas para cada uma das quatro funções de perda sugeridas na seção anterior. Por exemplo, para a função de perda MEA, observa-se que a indexação se dá com um lote da NTN-B com vencimento em 15/05/2011, dois lotes da NTN-B com vencimento em 15/05/2013, e assim por diante até um lote da NTN-B com vencimento em 15/08/2050 e, por fim, R\$ 15.129.841 em caixa. Em termos de alocação percentual (em relação aos R\$ 400 milhões disponíveis), a alocação na NTN-B com vencimento em 15/05/2011 corresponde a 5,00%, na NTN-B com vencimento em 15/05/2013 a 9,90%, e assim por diante até o percentual de 5,40% correspondente ao vencimento 15/08/2050, e 3,78% em caixa.

**Tabela 2 - Carteiras Indexadas ao IMA-B na Primeira Simulação**

Vencimento	Peso	MAEA		MAEQ		MEA		MMEA	
		Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%
15/05/2011	10,10%	2	10,01			1	5,00		
15/11/2011	3,37%								
15/08/2012	9,61%	1	5,03	1	5,03			1	5,03
15/05/2013	13,09%			2	9,90	2	9,90		
15/08/2014	3,63%			1	5,01			1	5,01
15/05/2015	3,63%	5	24,76	4	19,81	5	24,76	5	24,76
15/08/2016	0,26%								
15/05/2017	8,13%	3	14,99	3	14,99	3	14,99	3	14,99
15/08/2020	5,19%	2	10,17	2	10,17	2	10,17	2	10,17
15/08/2024	7,63%	3	15,43	3	15,43	3	15,43	3	15,43
15/08/2030	1,01%								
15/05/2035	7,26%			1	5,21	1	5,21	1	5,21
15/08/2040	1,34%								
15/05/2045	13,58%	3	16,07	2	10,71	1	5,36	1	5,36
15/08/2050	3,12%					1	5,40	1	5,40
<b>Caixa</b>		R\$14.200.180	3,55	R\$14.954.872	3,74	R\$15.129.841	3,78	R\$34.572.511	8,64

Fonte: Elaborado pelos autores.

Podemos observar também na Tabela 2 que as alocações nos vencimentos intermediários (15/05/2017, 15/08/2020 e 15/08/2024) foram iguais para as quatro funções de perda. As maiores variações nas alocações nas NTN-B ocorreram nas posições de curto prazo

e longo prazo, assim como no caso da posição em operações compromissadas para a função de perda MMEA.

A Tabela 3 apresenta algumas estatísticas para a duração e os erros de aderência das quatro carteiras da Tabela 2, assim como para os três fundos indexados ao IMA-B oferecidos ao mercado que exibiam os maiores patrimônios ao final de 2010. As estatísticas apresentadas são:

1. O *Benchmark-Value-at-Risk* (B-VaR) para os erros de aderência de cada carteira/fundo em relação ao IMA-B (DUARTE, 2005).
2. A diferença (ou desvio) da DM calculada para cada carteira/fundo em relação à DM do IMA-B para o fechamento do dia 30/12/2010.
3. O  $\beta$  e o  $R^2$  da regressão dos retornos da cada carteira/fundo (denotados  $r_1^C, r_2^C, \dots, r_{126}^C$ ) contra os retornos do índice IMA-B (denotados  $r_1^I, r_2^I, \dots, r_{126}^I$ ) quando considerados os retornos diários dos últimos seis meses (ou seja, cento e vinte e seis dias úteis), segundo o modelo de regressão linear

$$r_l^C = \alpha + \beta \times r_l^I + \epsilon_l \quad \forall l = 1, 2, \dots, 126 \quad (12)$$

com a estimação feita por mínimos quadrados ordinários, e com os erros assumidos como independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição  $N(0; \sigma^2)$ .

**Tabela 3 - Algumas Estatísticas Obtidas para a Primeira Simulação**

Cart. Ind. / Fundos	Patrimônio (aprox.)	B-VaR (95%, 1 dia)	Desv. Dur. Mac. (dias úteis)	Beta ( $\beta$ )	$R^2$
<b>MAEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,036%	-0,31	1,0377	99,41%
<b>MAEQ</b>	R\$ 400 milhões	-0,048%	-0,35	1,0539	98,99%
<b>MEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,047%	-0,04	1,0515	99,03%
<b>MMEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,048%	0,36	1,0519	98,92%
<b>Fundo 1</b>	R\$ 482 milhões	-0,020%	-80	0,9629	99,91%
<b>Fundo 2</b>	R\$ 4 bilhões	-0,072%	-283	0,8321	99,99%
<b>Fundo 3</b>	R\$ 118 milhões	-0,053%	-53	0,9301	98,10%

Fonte: Elaborado pelos autores

Observa-se na Tabela 3 que:

1. O B-VaR e os desvios da duração das quatro carteiras indexadas obtidas com o modelo (11) estão no mesmo patamar, não sendo válida a mesma colocação para os três fundos do mercado, especialmente o Fundo 2. Por exemplo, os desvios na DM das carteiras

indexadas são inferiores a um dia útil, não sendo este o caso para os três fundos de mercado, em especial o Fundo 2, com desvio de mais de um ano. Não por coincidência, o Fundo 2 é aquele que apresenta o maior valor (em módulo) para o B-VaR.

2. Os valores do  $R^2$  e a análise de resíduos indicam bons ajustes para o modelo de regressão linear (12), o que permite testar se os betas das quatro carteiras e três fundos diferem do valor esperado para as carteiras indexadas - ou seja, 1,0 – ao nível de significância de 5% (DUARTE, 2005). Não é possível rejeitar a hipótese de beta igual a 1,0 para as quatro carteiras, o que deve ser entendido como um indicador positivo da indexação. O mesmo não ocorre para os três fundos oferecidos no mercado, que apresentam betas significativamente diferentes de 1,0 (nos três casos, menores 1,0) para o nível de teste de 5%, o que sugere uma indexação deficiente.

A Figura 1 apresenta *box-plots* para os erros de aderência das quatro carteiras em relação ao IMA-B para os cenários usados na otimização. As distribuições são simétricas, sendo a mais concentrada ao redor de zero aquela relacionada à função de perda MAEA. Quanto às magnitudes dos desvios, os piores cenários de estresse ainda ficam limitados a erros de aderência inferiores a 0,09% (em valor absoluto), o que é um bom resultado.

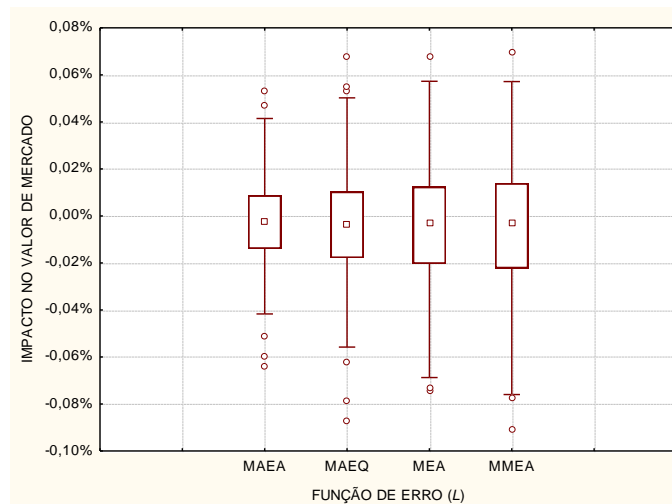


Figura 1 - Erros de Aderência da Primeira Simulação

A Figura 2 apresenta os desvios da DM para cada uma das quatro carteiras indexadas. Até mesmo para os piores cenários de estresse, os desvios não superam seis dias úteis (em valor absoluto), reafirmando os bons ajustes oferecidos pelo modelo (11).



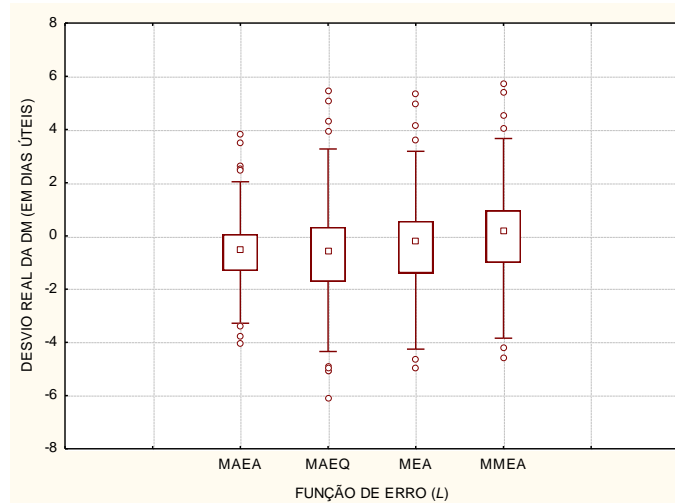


Figura 2 - Desvios da Duração de Macaulay da Primeira Simulação

Desse primeiro estudo simulado podemos observar que:

1. O uso das quatro funções de perdas não resultou em carteiras indexadas ao IMA-B muito diferentes em termos de composição (Tabela 2) e desempenho (Tabela 3, Figura 1 e Figura 2).
2. Quando as quatro carteiras indexadas são comparadas às carteiras dos três maiores fundos de investimentos oferecidos no mercado brasileiro e indexados ao IMA-B, observa-se uma diferença substancial em termos da qualidade da indexação (Tabela 3), com grande desvantagem para os três últimos.
3. Os erros de aderência (Figura 1) e desvios da DM (Figura 2) resultaram dentro do desejado para uma carteira indexada, com desvios concentrados e simétricos ao redor de zero, assim como valores e sinais (positivo ou negativo) aleatórios (Figura 3).

### 3.2 SEGUNDO ESTUDO SIMULADO

Neste segundo estudo, ilustra-se o efeito do tamanho da carteira na qualidade da indexação. Para tal, foi reduzido o montante disponível para investimento pela metade, de  $c = 400000000$  para  $c = 200000000$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  permanecem como no primeiro estudo simulado.

A Tabela 4 apresenta os dados para as quatro indexações obtidas. Uma comparação entre a Tabela 4 e a Tabela 2 permite observar que:

1. Há maior concentração da alocação (ou seja, menor número de vencimentos selecionados) no caso da Tabela 4, consequência direta da menor possibilidade de escolha devida à redução do montante disponível para investimento.

2. Ao contrário da Tabela 2, há menor concentração dos investimentos nas posições com maturidades intermediárias na Tabela 4.

3. As quatro alocações em operações compromissadas são da mesma ordem de magnitude na Tabela 4.

**Tabela 4 - Carteiras Indexadas ao IMA-B da Segunda Simulação**

Vencimento	Peso	MAEA		MAEQ		MEA		MMEA	
		Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%
15/05/2011	10,10%								
15/11/2011	3,37%					1	9,95		
15/08/2012	9,61%							1	10,07
15/05/2013	13,09%	2	19,81						
15/08/2014	3,63%			1	10,02			1	10,02
15/05/2015	3,63%			3	29,71	2	19,81	1	9,90
15/08/2016	0,26%								
15/05/2017	8,13%	2	19,98	2	19,98			3	29,97
15/08/2020	5,19%	2	20,33			2	20,33	1	10,17
15/08/2024	7,63%	2	20,57	1	10,28	3	30,85		
15/08/2030	1,01%								
15/05/2035	7,26%			1	10,42	1	10,42		
15/08/2040	1,34%								
15/05/2045	13,58%	1	10,71	1	10,71			2	21,42
15/08/2050	3,12%								
<b>Caixa</b>		R\$17.197.479	8,60	R\$17.720.175	8,86	R\$17.259.083	8,63	R\$16.882.496	8,44

Fonte: Elaborado pelos autores.

As estatísticas das novas carteiras, conforme Tabela 5, quando comparadas às estatísticas oferecidas na Tabela 3, apontam para pequena piora da qualidade da indexação em dois casos (MAEA e MEA), sem alterações relevantes nos outros dois casos (MAEQ e MMEA).

**Tabela 5 - Algumas Estatísticas Obtidas para a Segunda Simulação**

Cart. Ind. / Fundos	Patrimônio (aprox.)	B-VaR (95%, 1 dia)	Desv. Dur. Mac. (dias úteis)	Beta ( $\beta$ )	$R^2$
<b>MAEA</b>	R\$ 200 milhões	-0,066%	-0,16	1,0530	98,45%
<b>MAEQ</b>	R\$ 200 milhões	-0,047%	-1,68	1,0513	98,99%
<b>MEA</b>	R\$ 200 milhões	-0,090%	0,87	1,0548	96,90%
<b>MMEA</b>	R\$ 200 milhões	-0,035%	-0,24	1,0326	99,45%
<b>Fundo 1</b>	R\$ 482 milhões	-0,020%	-80	0,9629	99,91%
<b>Fundo 2</b>	R\$ 4 bilhões	-0,072%	-283	0,8321	99,99%
<b>Fundo 3</b>	R\$ 118 milhões	-0,053%	-53	0,9301	98,10%

Fonte: Elaborado pelos autores

Os comentários acima também são válidos ao serem consideradas a Figura 3 e a Figura 2, nas quais estão exibidos os desvios da DM para cada um dos cento e vinte e seis cenários utilizados. Pode-se observar também na Figura 3 que, para os cenários de estresse, os máximos desvios da DM (em valor absoluto) sobem de seis dias úteis, na Figura 2, para dez dias úteis, também fruto da pior indexação obtida pelas maiores restrições de investimento impostas ao modelo (11) pela redução de  $c$ .

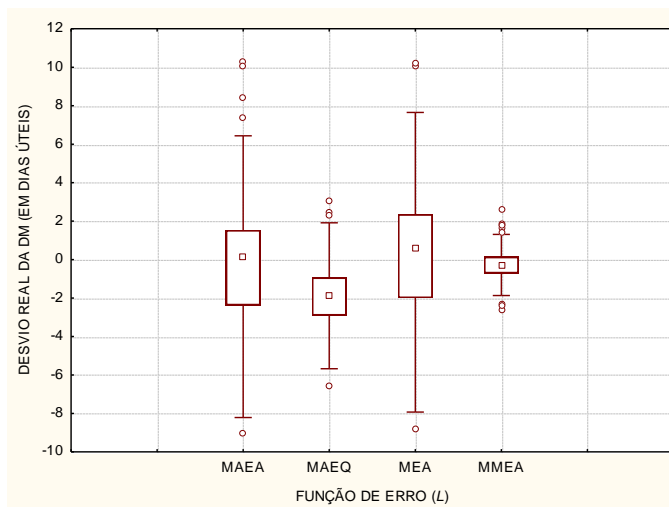


Figura 3 - Desvios da Duração de Macaulay da Segunda Simulação

Por fim, a análise conjunta da Figura 4 e da Figura 1 revela mais uma vez a piora da qualidade da indexação no caso das funções de perda MAEA e MEA.

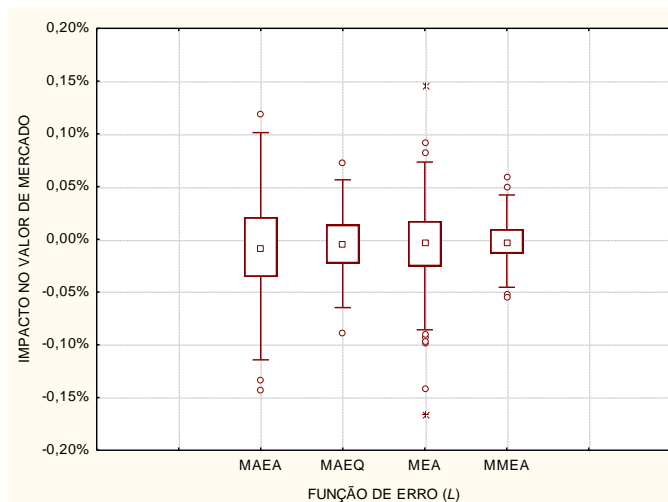


Figura 4 - Erros de Aderência da Segunda Simulação

### 3.3 TERCEIRO ESTUDO SIMULADO

Neste terceiro estudo simulado, eleva-se a demanda de investimento mínimo em caixa de  $\alpha = 1\%$  para  $\alpha = 5\%$ , mantendo-se todos os demais parâmetros conforme o primeiro estudo simulado. O objetivo neste estudo simulado é ilustrar o impacto da maior demanda de caixa na qualidade da indexação obtida. Vale mencionar que essa alteração pode ser considerada usual em momentos de maior volatilidade e/ou menor liquidez no mercado, com o gestor reforçando seu caixa como forma de responder mais facilmente a eventuais demandas de resgate dos seus clientes.

A Tabela 6 reproduz as alocações obtidas para as quatro funções de perda utilizadas.

**Tabela 6 - Carteiras Indexadas ao IMA-B da Terceira Simulação**

Vencimento	Peso	MAEA		MAEQ		MEA		MMEA	
		Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%
15/05/2011	10,10%								
15/11/2011	3,37%								
15/08/2012	9,61%					1	5,03		
15/05/2013	13,09%	2	9,90	1	4,95			5	24,76
15/08/2014	3,63%	1	5,01			1	5,01		
15/05/2015	3,63%	5	24,76	5	24,76	5	24,76	1	4,95
15/08/2016	0,26%								
15/05/2017	8,13%	2	9,99	3	14,99	3	14,99	3	14,99
15/08/2020	5,19%	2	10,17	2	10,17	2	10,17	1	5,08
15/08/2024	7,63%	3	15,43	3	15,43	3	15,43	3	15,43

15/08/2030	1,01%								
15/05/2035	7,26%					1	5,21	1	5,21
15/08/2040	1,34%								
15/05/2045	13,58%	3	16,07	3	16,07	1	5,36	3	16,07
15/08/2050	3,12%					1	5,40		
Caixa	R\$34.695.166	8,67	R\$54.564.744	13,64	R\$34.572.511	8,64	R\$54.058.499	13,51	

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 7 exhibe estatísticas obtidas que medem a qualidade do ajuste final, as quais devem ser comparadas às estatísticas da Tabela 3. A comparação das tabelas revela pouca alteração na qualidade do ajuste, sendo mantidos os níveis equivalentes para o B-VaR, por exemplo.

**Tabela 7 - Algumas Estatísticas Obtidas para a Terceira Simulação**

Cart. Ind. / Fundos	Patrimônio (aprox.)	B-VaR (95%, 1 dia)	Desv. Dur. Mac. (dias úteis)	Beta ( $\beta$ )	$R^2$
MAEA	R\$ 400 milhões	-0,038%	-0,16	1,0440	99,40%
MAEQ	R\$ 400 milhões	-0,043%	-1,35	1,0406	99,31%
MEA	R\$ 400 milhões	-0,048%	0,37	1,0519	99,92%
MMEA	R\$ 400 milhões	-0,019%	-0,12	1,0131	99,82%
Fundo 1	R\$ 482 milhões	-0,020%	-80	0,9629	99,91%
Fundo 2	R\$ 4 bilhões	-0,072%	-283	0,8321	99,99%
Fundo 3	R\$ 118 milhões	-0,053%	-53	0,9301	98,10%

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 5 e a Figura 6 devem ser consideradas em conjunto com a Figura 1 e Figura 2. Pode-se observar que a ordem de grandeza dos desvios é mantida, com pequenas alterações no caso da função de perda MMEA, sem que isso permita estabelecer diferenças substanciais entre este e o primeiro estudo simulado.

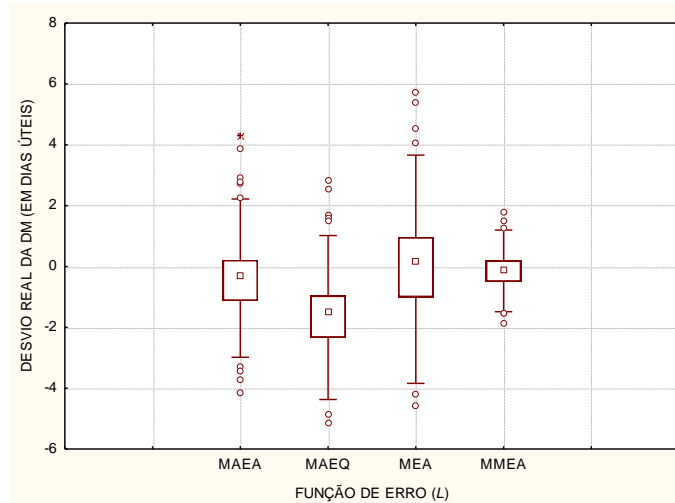


Figura 5 - Desvios da Duração de Macaulay da Terceira Simulação

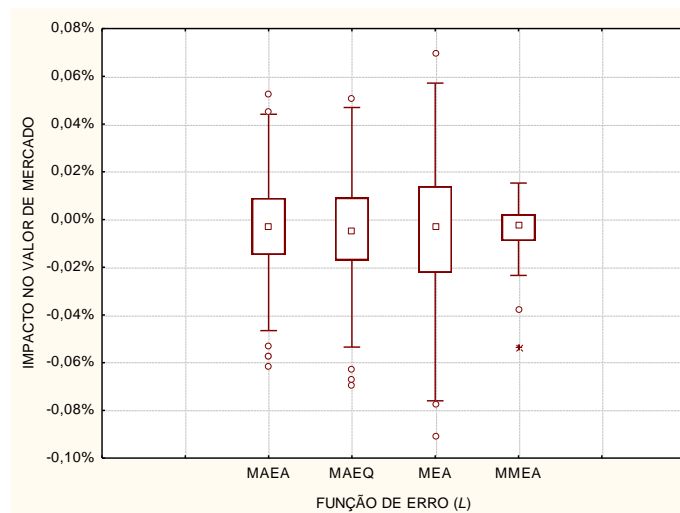


Figura 6 - Erros de Aderência da Terceira Simulação

### 3.4 QUARTO ESTUDO SIMULADO

Neste estudo simulado, facilitou-se a alocação máxima em cada vencimento ao dobrarmos o valor de  $\gamma$  de 0,2% para 0,4%, mantendo-se o total disponível para investimento e a demanda mínima em caixa nos mesmos níveis do primeiro estudo simulado. O objetivo neste quarto estudo simulado é investigar o impacto do eventual investimento em maiores quantidades de lotes (para cada vencimento disponível) sobre a indexação final.

A Tabela 8 reproduz as alocações obtidas para as quatro funções de perda utilizadas. A análise da Tabela 8 e da Tabela 2 ilustra que há tendência de maior concentração das carteiras indexadas nos vencimentos intermediários neste estudo simulado para três funções de perda (MAEA, MAEQ e MEA).

**Tabela 8 - Carteiras Indexadas ao IMA-B da Quarta Simulação**

Vencimento	Peso	MAEA		MAEQ		MEA		MMEA	
		Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%
15/05/2011	10,10%							1	5,00
15/11/2011	3,37%								
15/08/2012	9,61%							3	15,10
15/05/2013	13,09%								
15/08/2014	3,63%	1	5,01	1	5,01			2	10,02
15/05/2015	3,63%	7	34,66	7	34,66	6	29,71	1	4,95
15/08/2016	0,26%								
15/05/2017	8,13%	5	24,98	5	24,98	5	24,98	5	24,98
15/08/2020	5,19%	2	10,17	2	10,17	1	5,08	1	5,08
15/08/2024	7,63%	1	5,14	1	5,14	6	30,85	2	10,28
15/08/2030	1,01%								
15/05/2035	7,26%							1	5,21
15/08/2040	1,34%							1	5,34
15/05/2045	13,58%	3	16,07	3	16,07			2	10,71
15/08/2050	3,12%					1	5,40		
<b>Caixa</b>		R\$15.879.956	3,97	R\$15.879.956	3,97	R\$15.876.445	3,97	R\$13.248.170	3,31

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 9 aponta estatísticas para o ajuste obtido, devendo ser considerada em conjunto com a Tabela 3. Não são observadas alterações relevantes na qualidade da indexação para as três funções de perda consideradas.

**Tabela 9 - Algumas Estatísticas Obtidas para a Quarta Simulação**

Cart. Ind. / Fundos	Patrimônio (aprox.)	B-VaR	Desv. Dur. Mac.	Beta	$R^2$
		(95%, 1 dia)	(dias úteis)	( $\beta$ )	
<b>MAEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,056%	-0,22	1,0711	98,58%
<b>MAEQ</b>	R\$ 400 milhões	-0,056%	-0,22	1,0711	98,58%
<b>MEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,081%	+0,42	1,0853	97,02%
<b>MMEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,028%	-0,20	1,0289	99,58%
<b>Fundo 1</b>	R\$ 482 milhões	-0,020%	-80	0,9629	99,91%
<b>Fundo 2</b>	R\$ 4 bilhões	-0,072%	-283	0,8321	99,99%
<b>Fundo 3</b>	R\$ 118 milhões	-0,053%	-53	0,9301	98,10%

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 7 e a Figura 8 apresentam dados que devem ser considerados em conjunto com a Figura 1 e a Figura 2. Mais uma vez, não são observadas alterações na qualidade do ajuste das funções de perda consideradas.

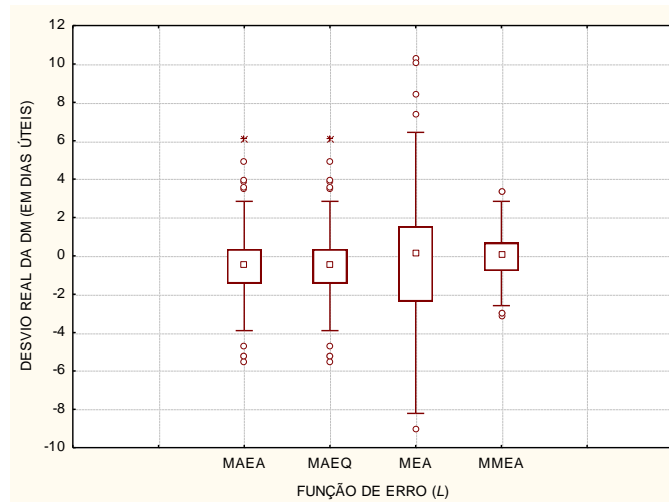


Figura 7 - Desvios da Duração de Macaulay da Quarta Simulação

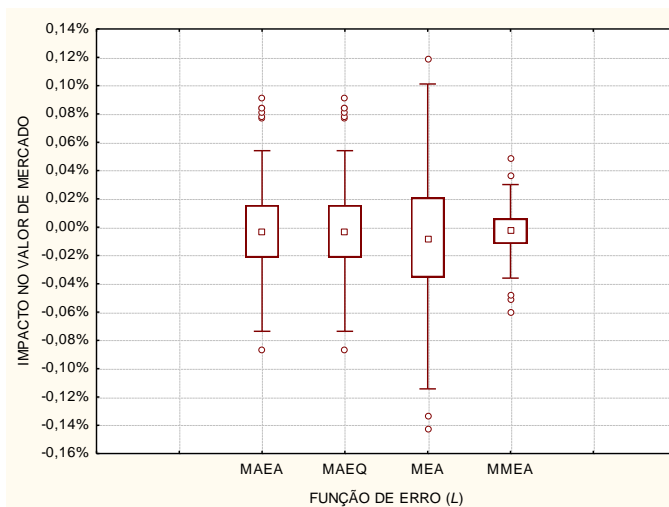


Figura 8 - Erros de Aderência da Quarta Simulação

### 3.5 QUINTO ESTUDO SIMULADO

Neste quinto e último estudo simulado, foram mantidos os parâmetros  $c$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  como no primeiro exemplo, mas foram alterados os cenários utilizados: em vez de usar as variações para a estrutura a termo dos cupons de IPCA do segundo semestre de 2010, utilizaram-se agora as variações do primeiro semestre daquele mesmo ano. O propósito é ilustrar eventuais alterações na disposição dos desvios entre a carteira indexada e o IMA-B para outro conjunto de cenários históricos.

As composições das carteiras indexadas estão dadas na Tabela 10 e suas estatísticas de ajuste na Tabela 11. Há pequenas alterações nas composições e desempenho da indexação. É



interessante mencionar que, no primeiro semestre de 2010, ocorreram alguns dias específicos nos quais houve variações acima do usual na estrutura a termo dos cupons de IPCA, sem que estes tenham afetado substancialmente a qualidade dos ajustes e, por exemplo, o B-VaR das carteiras indexadas.

**Tabela 10 - Carteiras Indexadas ao IMA-B da Quinta Simulação**

Vencimento	Peso	MAEA		MAEQ		MEA		MMEA	
		Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%	Lotes / Valor	%
15/05/2011	10,10%							2	10,01
15/11/2011	3,37%								
15/08/2012	9,61%	2	10,07	1	5,03	1	5,03	1	5,03
15/05/2013	13,09%	1	4,95	2	9,90	2	9,90	5	24,76
15/08/2014	3,63%			1	5,01	1	5,01	1	5,01
15/05/2015	3,63%	5	24,76	4	19,81	4	19,81		
15/08/2016	0,26%								
15/05/2017	8,13%	3	14,99	3	14,99	3	14,99	2	9,99
15/08/2020	5,19%	2	10,17	2	10,17	2	10,17		
15/08/2024	7,63%	3	15,43	3	15,43	3	15,43	3	15,43
15/08/2030	1,01%								
15/05/2035	7,26%	1	5,21	1	5,21	1	5,21	3	15,64
15/08/2040	1,34%								
15/05/2045	13,58%	2	10,71	2	10,71	2	10,71	2	10,71
15/08/2050	3,12%								
Caixa		R\$ 14.861.667	3,72	R\$ 14.954.872	3,74	R\$ 14.954.872	3,97	R\$ 13.686.735	3,42

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 11 - Algumas Estatísticas Obtidas para a Quinta Simulação**

Cart. Ind. / Fundos	Patrimônio (aprox.)	B-VaR	Desv. Dur. Mac.	Beta	$R^2$
		(95%, 1 dia)	(dias úteis)	( $\beta$ )	
<b>MAEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,038%	-0,98	1,0564	98,65%
<b>MAEQ</b>	R\$ 400 milhões	-0,038%	-0,35	1,0568	98,65%
<b>MEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,038%	-0,35	1,0568	98,65%
<b>MMEA</b>	R\$ 400 milhões	-0,023%	-0,89	0,9960	99,52%
<b>Fundo 1</b>	R\$ 482 milhões	-0,020%	-80	0,9629	99,91%
<b>Fundo 2</b>	R\$ 4 bilhões	-0,072%	-283	0,8321	99,99%
<b>Fundo 3</b>	R\$ 118 milhões	-0,053%	-53	0,9301	98,10%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os erros de aderência e os desvios da DM deste novo estudo simulado estão mostrados na Figura 9 e Figura 10, respectivamente. A análise dessas duas últimas figuras e suas comparações com a Figura 1 e Figura 2 mostram claramente *outliers* (representados nos *box-plots* como “\*”), algo que não se pode observar em nenhuma outra figura apresentada até aqui. Mesmo diante desses *outliers*, o ajuste se manteve bom, especialmente quando comparado aos resultados obtidos para os três fundos oferecidos no mercado financeiro brasileiro conforme a Tabela 11.

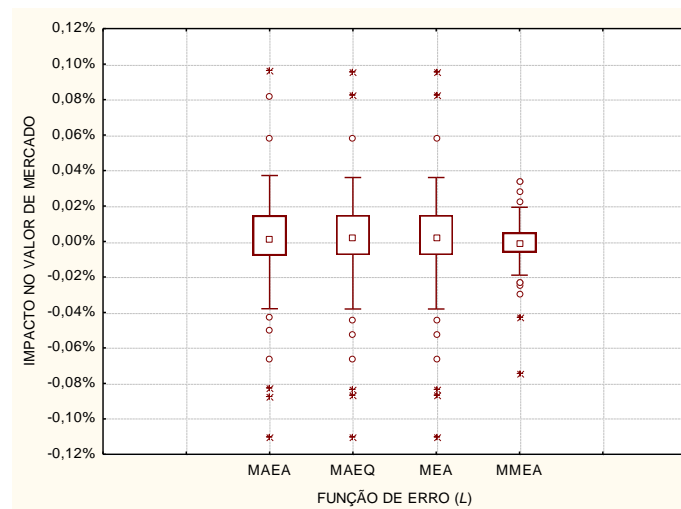


Figura 9 - Erros de Aderência da Quinta Simulação

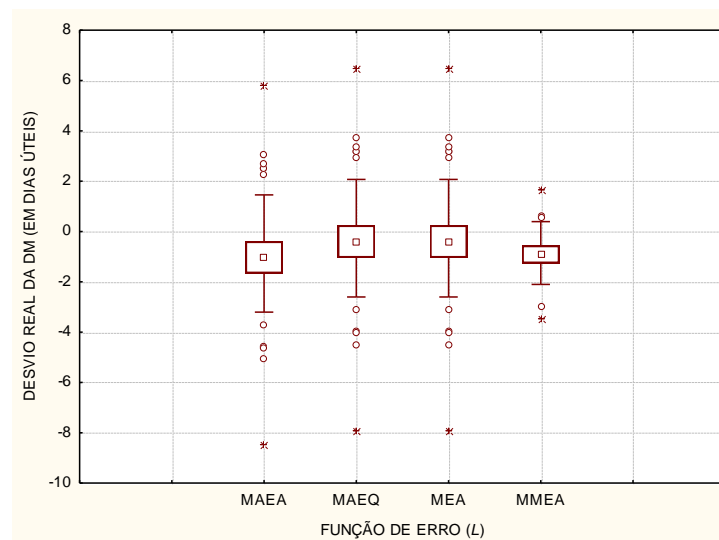


Figura 10 - Desvios da Duração de Macaulay da Quinta Simulação

#### 4 CONCLUSÕES

Considerou-se, neste artigo, o problema de indexação das carteiras de investimento ao índice de renda fixa brasileiro IMA-B. Diante das transformações observadas no mercado de renda fixa brasileiro na última década – alongamento da maturação dos títulos públicos federais, mudança dos índices de referência para o acompanhamento de investimentos,

aumento da previdência privada, tendência de redução do patamar das taxas de juros no longo prazo e crescimento do mercado de debêntures –, o interesse de muitos gestores de fundos (de investimentos e de pensão) passou a incluir títulos de longo prazo indexados ao IPCA, como as NTN-B.

A gestão passiva de recursos tem ganhado maior aceitação no Brasil e no exterior, especialmente no caso dos fundos de pensão. Entre as possibilidades para a gestão passiva de recursos no mercado de renda fixa está o balanceamento regular de uma carteira de forma a ajustá-la continuamente a alterações no índice de referência – vencimento de títulos, mudanças de composição, pagamento de juros ou percentuais do principal e retornos diferenciados entre ativos – foi a escolhida para a indexação ao IMA-B.

A metodologia foi descrita e ilustrada numericamente com a apresentação de cinco estudos simulados. A proposta está baseada em um conjunto de cenários para representar os possíveis movimentos da estrutura a termo dos cupons do IPCA, permitindo a marcação a mercado das NTN-B para cada cenário e, portanto, definindo diferentes níveis de retorno e risco para cada ativo para o horizonte de reestruturação da carteira escolhido pelo gestor. Dessa forma, uma vez escolhidos os parâmetros de um modelo de otimização para os erros de aderência entre o IMA-B e a carteira indexada, e feita a escolha de uma função de perda pelo gestor, pode-se obter o número de ativos a serem comprados/vendidos para cada etapa de balanceamento.

Os resultados obtidos quando do uso da metodologia para estudos com dados reais do mercado de títulos públicos federais permitiram concluir que os erros de aderência foram bem controlados, especialmente quando essas quantidades foram comparadas aos resultados obtidos para os três maiores fundos de investimento indexados ao IMA-B oferecidos publicamente no Brasil. Os impactos de mudanças nos parâmetros de entrada do modelo sobre a distribuição de probabilidade dos desvios foram considerados e ilustrados com dados reais.

Este artigo documenta uma contribuição para o avanço da gestão passiva de carteiras por gestores de renda fixa no Brasil. Como a proposta permite o melhor controle dos erros de aderência das carteiras indexadas, deve facilitar a expansão da gestão passiva de recursos de renda fixa no mercado financeiro local. Em particular, a metodologia proposta pode ser diretamente aplicada à construção de Fundos de Índice (*exchange traded-funds*) atrelados ao IMA-B.

Uma limitação deste artigo é que existem outros índices de renda fixa, como o IRF-M, IMA-Geral e IMA-C, que podem ser escolhidos para a indexação de carteiras de renda fixa no Brasil. Este artigo limitou-se à análise do IMA-B. Em outras palavras, uma extensão possível para a metodologia proposta neste artigo é a sua adaptação, por exemplo, para indexação ao IRF-M, quando títulos como LTN e NTN-F devem ser utilizados para a estruturação da carteira. Também diante do surgimento de índices para o mercado de títulos de renda fixa corporativos, em que o risco de crédito se encontra presente, a adaptação da metodologia a esses novos índices é outra possível extensão.

Outro trabalho interessante resultante deste artigo é a incorporação da metodologia proposta em uma estratégia dinâmica que alterne entre a gestão ativa e a gestão passiva – como no caso de *enhanced-indexing* - algo que somente agora começa a ser utilizado por gestores de fundos (de investimento e de pensão) no Brasil.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, C.; BARBOSA, A. Hedging index exchange-traded funds. **Journal of Banking & Finance**, v. 32, n. 1, p. 326-337, 2008.

AMENC, N.; GOLTZ, F. The way ahead for exchange-traded funds: results from a European survey. **The Journal of Alternative Investments**, v. 12, n. 2, p.50-64, 2009.

ANBIMA. A importância dos índices ANBIMA para os investidores institucionais e o desenvolvimento de novos *benchmarks*. In: ANAIS DO CONGRESSO BRASILEIRO DOS FUNDOS DE PENSÃO: PROSPERIDADE E DESAFIOS, 30., 2010, Olinda (PE). **Anais...** Olinda: ANBIMA, 2010a.

\_\_\_\_\_. Mercado de renda fixa. **Relatório Técnico**, ANBIMA, Rio de Janeiro, 2010b.

\_\_\_\_\_. Mercado de renda fixa. **Relatório Técnico**, ANBIMA, Rio de Janeiro, 2014.

ANDIMA. IMA completa quatro anos como novo parâmetro para o mercado de renda fixa. **Relatório Técnico**, Rio de Janeiro: ANDIMA, 2009.

BANCO DO BRASIL. Nota técnica MODERF n° 2006/003. **Relatório Técnico** (Interno). Rio de Janeiro: Banco do Brasil, 2006.

\_\_\_\_\_. Manual corporativo de marcação a mercado. **Relatório Técnico** (Interno). Rio de Janeiro: Banco do Brasil, 2010.

BARRO, D.; CANESTRELLI, E. Tracking error: a multistage portfolio model. **Annals of Operations Research**, v. 165, n. 1, 47-66, 2009.

BLACKROCK. Investindo em fundos de índices (ETFs): O Melhor de Dois Mundos. In: ANAIS DO BRAZIL EQUITY IDEAS CONFERENCE, 6., 2013, São Paulo (SP). **Anais...** São Paulo: BEIC, 2013.

BLITZ, D.; HUIJ, J.; SWINKELS, L. The performance of European index funds and exchange-traded funds. **European Financial Management**, v. 18, n. 2, p. 649-662, 2012.

BM&FBOVESPA. Boletim ETF: dezembro de 2012. **Relatório Técnico**, BM&FBOVESPA, São Paulo, 2013.

BNDES. **Sala de imprensa 2004**. Disponível em:

<[http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/bndes/bndes\\_pt/Institucional/Sala\\_de\\_Imprensa/Noticias/2004/20040706\\_not841.html](http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/bndes/bndes_pt/Institucional/Sala_de_Imprensa/Noticias/2004/20040706_not841.html)>. Acesso em: 09 dez. 2013.

BRASIL. **Relatório mensal da dívida pública**: dezembro. Brasília: Secretaria do Tesouro Nacional, 2009

\_\_\_\_\_. **Relatório mensal da dívida pública**: dezembro. Brasília: Secretaria do Tesouro Nacional, 2013.

BRUCE, B. **Exchange traded funds**. New York: Institutional Investor Journal, 2009.

BRUCE, B.; FUHR, D. (Eds.). **ETFs & indexing in European markets**. New York: Institutional Investor Journal, 2012.

BUCKLEY, I. R. C; KORN, R. Optimal index tracking under transaction costs and impulse control. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 1, n. 3, 315-330, 1998.

CALDEIRA, J. F.; PORTUGAL, M. Estratégia *long-short* neutra ao mercado e *index tracking* baseadas em portfólios cointegrados. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 8, n. 4, 469-504, 2010.

CANAKGOZ, N. A.; BEASLEY, J. E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. **European Journal of Operational Research**, v. 196, n. 2, 384-399, 2009.

CARVALHO, L. O.; MORAIS, J. F. M. Mercado primário da dívida pública federal. In: SILVA, A. C.; CARVALHO, L. O.; MEDEIROS, O. L. (Orgs.). **Dívida pública: a experiência brasileira**. Brasília: Secretaria do Tesouro Nacional, p. 359-381, 2009.

CFA INSTITUTE. **Corporate finance and portfolio management**. New Jersey: Wiley, 2009.

COLEMAN, T. F.; LI, Y.; HENNIGER, J. Minimizing tracking error while restricting the number of assets. **Journal of Risk**, v. 8, n. 1, 33-56, 2006.

CORNUEJOLS, G; TUTUNCU, R. **Optimization methods in finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

CREMERS, K. J. M.; PETAJISTO, A. How active is your fund manager? A new measure that predicts performance. **The Review of Financial Studies**, v. 22, n. 9, p. 3329-3365, 2009.

DUARTE, A. M. Indexing stock portfolios in Brazil: tracking the Ibovespa and the FGV100. **Emerging Markets Quarterly**, v. 1, n. 1, p. 20-26, 1997.

DUARTE, A. M. **Gestão de riscos: fundos de investimentos**. São Paulo: Pearson, 2005.

FABOZZI, F.J. **Duration, convexity, and other bond risk measures**. New Hope: Frank J. Fabozzi Associates, 1999.

FABOZZI, F. J.; MARKOWITZ, H. **The theory and practice of investment management**. New Jersey: Wiley, 2011.

FAMA, E; FRENCH, K. Luck versus skill in the cross-section of mutual fund returns. **The Journal of Finance**, v. 65, n. 5, 1915-1947, 2010.

FERRI, R. A. **All about index funds**. New York: McGraw-Hill, 2007.

FRINO, A.; GALLAGHER, D. R. Tracking S&P500 index funds. **Journal of Portfolio Management**, v. 28, n. 1, 44-55, 2001.

FUSCO, R. A. et al. **Quantitative investment analysis**. New Jersey: Wiley, 2007.

GAIWORONSKI, A. A.; KRYLOV, S.; VAN DER WIJST, N. Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. **European Journal of Operational Research**, v. 163, n. 1, p. 115-131, 2005.

GUASTAROBA, G.; SPERANZA, M. G. Kernel search: an application to the index tracking problem. **European Journal of Operational Research**, v. 217, n. 1, 54-68, 2012.

HARPER, J.; MADURA, J.; SCHUNUSENBERG, O. Performance comparison between exchange-traded funds and closed-end country funds. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, v. 16, n. 2, p. 104-122, 2006.

INVESTMENT COMPANY INSTITUTE. Investment company fact book: a review of trends and activity in the investment company industry. **Technical Report**, Investment Company Institute, Washington, 2011.

\_\_\_\_\_. Investment company fact book: a review of trends and activity in the investment company industry. **Technical Report**, Investment Company Institute, Washington, 2013.

JANSEN, R.; VAN DIJK, R. Optimal benchmark tracking with small portfolios. **Journal of Portfolio Management**, v. 29, n. 1, p. 33-39, 2002.

JORION, P. **Value-at-risk: the new benchmark for managing investment risk**. New York: McGraw-Hill, 2006.

KOSTOVETSKY, L. Index mutual funds and exchange traded funds: a comparison of two methods of passive investment. **The Journal of Portfolio Management**, v. 21, n. 1, p. 80-92, 2003.

KRINK, T.; MITTNIK, S.; PATERLINI, S. Differential evolution and combinatorial search for constrained index-tracking. **Annals of Operations Research**, v. 172, n. 3, 153-176, 2009.

LARSEN, G. A.; RESNICK, B. G. Empirical insights on indexing. **The Journal of Portfolio Management**, v. 25, n. 1, 51-60, 1998.

MARGIN, J. L. et al. **Managing investment portfolios: a dynamic approach**. New Jersey: Wiley, 2007.

MATOS, G. A. S.; IQUIAPAZA, R. A.; FERREIRA, B. P. Análise da exposição a perdas dos ETFs brasileiros conforme as técnicas de avaliação de risco de mercado *Value-at-Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). **Brazilian Business Review**, v. 11, n. 4, 91-115, 2014.

PETAJISTO, A. The index premium and its hidden cost in tracking error. **The Journal of Empirical Finance**, v. 18, n. 2, 271-288, 2011.

REILLY, F. K.; KAO, G. W. Alternative bond market indexes. **Financial Analysts Journal**, v. 48, n. 1, p. 44-58, 1992.

ROMPOTIS, G. Interfamily competition on index tracking: the case of the Vanguard ETFs and index funds. **Journal of Asset Management**, v. 10, n. 1, p. 263-278, 2009.

SANFINS, M. A. R. B.; DUARTE, A. M. Indexação de fundos de pensão com fundos de índice. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 12, n. 2, p. 13-39, 2014.

SANT'ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; BORENSTEIN, D. *Index Tracking* com controle do número de ativos. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 12, n. 1, p. 89-119, 2014.

SAMUEL, S. L. Queda dos juros amplia importância de referências. **Revista Fonte**, v. 4, p. 4-5, 2009.

SILVA, A. C.; CARVALHO, L. O.; GARRIDO, F. E. Evolução recente do mercado de títulos da dívida pública federal. In: SILVA, A. C.; CARVALHO, L. O.; MEDEIROS, O. L. (Orgs.). **Dívida pública: a experiência brasileira**. Brasília: Secretaria do Tesouro Nacional, 2009.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional**. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

VOLPERT, K. E. Chapter 4: Managing index and enhanced indexed bond portfolios. In: FABOZZI, F. J. (Eds.). **Fixed income readings for the chartered financial analysts program**. New Hope: Frank J. Fabozzi Associates, 2000.

YAO, D. D.; ZHANG, S.; ZHOU, X. Y. Tracking a financial benchmark using a few assets. **Operations Research**, v. 54, n. 4, p. 232-246, 2006.